

この見本について

高校数学の俯瞰 - 演習セット - 数学III C 第 6 章「複素数平面」

これは**見本**です。実際の商品から 4 問だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … 方針の候補が多い問題や、別解を複数紹介できる問題を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の【入試対策 実戦 Point 活用演習】からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて ②目次 ③問題編 ④答え一覧 ⑤解説編 の順に入っています。
- 解説は「問題を見て思うこと」→「方針の候補 (○△×)」→「解答」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」の順です。
- 使った Point は本編の該当箇所をそのまま載せているので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 4 $|\alpha| = 2$ 、 $|\beta| = 3$ 、 $|\alpha + \beta| = 4$ のとき、 $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ の値を求めよ。 (Point 6-1-5)

問 23 $A(1 + 2i)$ 、 $B(4 + 3i)$ 、 $C(3 + 6i)$ とする。 $\triangle ABC$ はどのような三角形か。 (Point 6-1-25)

問 26 次の方程式・条件を満たす点 z 全体は、それぞれどのような図形か。

(1) $|z - 2| = |z - 2i|$ (2) $(z - 1)(\bar{z} - 1) = 4$

(3) $\frac{z-i}{z+i}$ が純虚数 (4) $z = (1-t)(1+i) + t(3-i)$ (t は実数) (Point 6-1-27)

【入試対策 実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 53 $|z| = 1$ とする。

(1) $|z^2 - z + 1| = |2\cos\theta - 1|$ が成り立つことを示せ。ただし $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とする。

(2) $|z^2 - z + 1|$ の最大値と最小値を求め、そのときの z をすべて求めよ。

(3) $|z^2 - z + 1| = 1$ を満たす z をすべて求めよ。 (Point 6-1-5)

解説編（見本）

問 4

$|\alpha| = 2$ 、 $|\beta| = 3$ 、 $|\alpha + \beta| = 4$ のとき、 $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ の値を求めよ。

問題を見て思うこと

絶対値が 3 つ与えられていて、求めたいのは $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ 。→ 絶対値を 2 乗して展開すると、ちょうどこの形が出てくるのでは？

▶ Point 6-1-5

実際 $|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$ を展開すると $|\alpha|^2 + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + |\beta|^2$ 。真ん中が求めたい量そのもの。

→ これはベクトルで $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ とするのと同じ。 $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ が内積 $2\vec{a} \cdot \vec{b}$ にあたる。

$\alpha\bar{\beta}$ と $\bar{\alpha}\beta$ は互いに共役なので、その和は実数。答えが実数になることは先に見当が付く。

方針の候補

× $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ として α 、 β を決めようとする … 和については絶対値をバラせない。実際 $2 + 3 = 5 \neq 4$ である。

○ $|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$ を展開する。 ▶ Point 6-1-5

△ $\alpha = a + bi$ 、 $\beta = c + di$ において成分で押す … 通る。 $a^2 + b^2 = 4$ などの連立になり、 $2(ac + bd)$ を求めることになる。文字が 4 つに増えるので手数は多い。

解答

$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta}$ であるから

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + |\beta|^2$$

与えられた値を代入すると

$$4^2 = 2^2 + (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + 3^2$$

よって

$$\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 16 - 4 - 9 = 3$$

この問題で身につくこと

- ・絶対値ときたら 2 乗して $z\bar{z}$ に。展開すれば $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ が自然に出てくる。
- ・この量はベクトルの内積にあたる。 $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ の展開とまったく同じ形をしている。
- ・ $\alpha\bar{\beta}$ と $\bar{\alpha}\beta$ は互いに共役なので、和は必ず実数。答えの見当がつく。
- ・絶対値は和・差についてはバラせない。三角不等式で押さえられるだけである。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 6-1-5 複素数の大きさは 2 乗 !

(本文は問 3 参照)

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = |\alpha|^2 + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + |\beta|^2$$

(ベクトルの $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ に対応する)

Point 6-1-4 共役な複素数

(本文は問 3 参照)

問 23

$A(1+2i)$ 、 $B(4+3i)$ 、 $C(3+6i)$ とする。 $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

問題を見て思うこと

章のフロー：①まずは幾何的に考える → ②一旦 z のままで → ③無理そうなら成分や極形式に。

▶ Point 6-1-1

→ この問題は③極形式（辺の比と角を商で読む）。

三角形の形状ときたら $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の極形式。

▶ Point 6-1-25

→ この商の絶対値が辺の比 $\frac{AC}{AB}$ 、偏角が $\angle BAC$ 。1 つの計算で角と比が同時に分かる。

▶ Point 6-1-20

→ たとえば商が i なら「比が 1、角が $\frac{\pi}{2}$ 」で直角二等辺。商が $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ なら正三角形。
ここでは $\gamma-\alpha=2+4i$ 、 $\beta-\alpha=3+i$ 。商を計算してみる。

方針の候補

○ $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を極形式にして、絶対値と偏角を読む。 ▶ Point 6-1-25

△ 3 辺の長さをすべて求めて比べる … 通る。 $AB = \sqrt{10}$ 、 $BC = \sqrt{10}$ 、 $CA = 2\sqrt{5}$ から二等辺で、
三平方の関係 $10+10=20$ より直角も分かる。角と比を別々に調べる分だけ手数は増える。

解答

$\alpha=1+2i$ 、 $\beta=4+3i$ 、 $\gamma=3+6i$ とすると $\beta-\alpha=3+i$ 、 $\gamma-\alpha=2+4i$ である。よって

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{2+4i}{3+i} = \frac{(2+4i)(3-i)}{10} = \frac{6-2i+12i+4}{10} = \frac{10+10i}{10} = 1+i$$

$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ であるから

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}, \quad \angle BAC = \frac{\pi}{4}$$

よって $AC = \sqrt{2}AB$ かつ $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ であるから、 $\triangle ABC$ は

$$\angle ABC = \frac{\pi}{2} \text{ の直角二等辺三角形}$$

(実際 $AB = |3+i| = \sqrt{10}$ 、 $BC = |\gamma-\beta| = |-1+3i| = \sqrt{10}$ 、 $CA = |2+4i| = 2\sqrt{5}$ であり、
 $AB=BC$ 、 $AB^2+BC^2=CA^2$ を満たす。)

この問題で身につくこと

- ・形状ときたら $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の極形式。絶対値が辺の比、偏角が角。
- ・1 回の計算で角と比が同時に出るのが複素数の強み。辺の長さを 3 つ求める道では、角は別に調べることになる。

- ・代表的な値： i なら直角二等辺、 $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ なら正三角形、実数なら 3 点が一直線上。
- ・頂点の 1 つが原点なら $\frac{\beta}{\alpha}$ を見るだけでよい。引く手間が省けるので、原点に平行移動してから調べるのも手。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 6-1-25 三角形の形状ときたら・・・

$\triangle ABC$ の形状ときたら

$$\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}$$

などの極形式表示によってわかる。特に、頂点の一つが原点 O なら、 $\triangle OAB$ の形状は

$$\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{または} \quad \frac{\alpha}{\beta}$$

の極形式表示によってわかる。

Point 6-1-20 偏角

(本文は問 18 参照)

Point 6-1-9 複素数の積・商と偏角の公式

(本文は問 8 参照)

問 26

次の方程式・条件を満たす点 z 全体は、それぞれどのような図形か。

- (1) $|z-2| = |z-2i|$ (2) $(z-1)(\bar{z}-1) = 4$
 (3) $\frac{z-i}{z+i}$ が純虚数 (4) $z = (1-t)(1+i) + t(3-i)$ (t は実数)

問題を見て思うこと

章のフロー：①まずは幾何的に考える → ②一旦 z のままで → ③無理そうなら成分や極形式に。

▶ Point 6-1-1

→ この問題は①幾何 → ② z のまま。

同じ図形でも書き方が何通りもある。4 つの式が、それぞれどの型かを見分ける問題。

▶ Point 6-1-27

(1) $|z-\alpha| = |z-\beta|$ の形。→ 2 点から等距離 = 垂直二等分線。

(2) $(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = |z-\alpha|^2$ なので、 $|z-1|^2 = 4$ 。→ 円。

(3) $\frac{z-i}{z+i}$ が純虚数。→ 偏角が $\pm \frac{\pi}{2}$ なので、点 z から α, β を見込む角が直角。つまり α, β を直径の両端とする円（ただし α, β 自身は除く）。

(4) $(1-t)\alpha + t\beta$ の形。→ 2 点 α, β を通る直線。 $t=0$ で α 、 $t=1$ で β になる。

方針の候補

○ 式の形から型を見分ける。 ▶ Point 6-1-27

× (3) で除外する点を書かない… $z=i$ では分子が 0（純虚数でない）、 $z=-i$ では分母が 0 で定義できない。この 2 点は除く。

解答

(1) 2 点 $2, 2i$ から等距離にある点であるから、2 点 2 と $2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線。

(2) $(z-1)(\bar{z}-1) = (z-1)\overline{(z-1)} = |z-1|^2$ であるから $|z-1|^2 = 4$ 、すなわち $|z-1| = 2$ 。よって点 1 を中心とする半径 2 の円。

(3) $\frac{z-i}{z+i}$ が純虚数であるとき、その偏角は $\pm \frac{\pi}{2}$ である。これは点 z から 2 点 $i, -i$ を見込む角が $\frac{\pi}{2}$ であることを表すから、求める図形は 2 点 $i, -i$ を直径の両端とする円、すなわち原点を中心とする半径 1 の円（ただし 2 点 $i, -i$ を除く）。

(4) $\alpha = 1+i, \beta = 3-i$ とすると $z = (1-t)\alpha + t\beta$ 。 $t=0$ のとき $z = \alpha$ 、 $t=1$ のとき $z = \beta$ であり、 t は実数全体を動くから 2 点 $1+i$ と $3-i$ を通る直線。

この問題で身につくこと

・同じ図形でも書き方は何通りもある。式を見て「距離か、角か、媒介変数か」を見分ける。

- ・直線の顔： $z = \alpha + t\beta$, $z = (1-t)\alpha + t\beta$, $\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数、 $|z-\alpha| = |z-\beta|$ 。
- ・円の顔： $|z-\alpha| = r$, $(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = r^2$, $z = \alpha + r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ が純虚数、 $n|z-\alpha| = m|z-\beta|$ 。
- ・除外点を忘れない。分母が 0 になる点、分子が 0 になる点は、条件から外れることがある。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 6-1-27【重要】代表的な図形の複素数の方程式まとめ

動点を z 、定点を α , β とする。ベクトルと同じで同じ図形でも書き方が何通りもある。

■ 直線

- ① 点 α を通り β 方向： $z = \alpha + t\beta$ (t は実数)
- ② 2 点 α , β を通る： $z = (1-t)\alpha + t\beta$, $\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数 (共線条件)
- ③ 2 点 α , β から等距離： $|z-\alpha| = |z-\beta|$ (垂直二等分線)

■ 円

- ① 中心 α 、半径 r ： $|z-\alpha| = r$, $(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = r^2$, $z = \alpha + r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- ② α , β を直径の両端： $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ が純虚数 ($\angle = 90^\circ$)
- ③ α , β からの距離の比が $m:n$ ($m \neq n$)： $n|z-\alpha| = m|z-\beta|$ (アポロニウスの円)
- ④ 4 点が同一円周上：共円条件

Point 6-1-22 直線の方程式②

(本文は問 20 参照)

Point 6-1-23 円の方程式

(本文は問 21 参照)

Point 6-1-21 直線の方程式①

(本文は問 19 参照)

問 53

$|z| = 1$ とし、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とする。

(1) $|z^2 - z + 1| = |2 \cos \theta - 1|$ が成り立つことを示せ。(2) $|z^2 - z + 1|$ の最大値と最小値を求め、そのときの z をすべて求めよ。(3) $|z^2 - z + 1| = 1$ を満たす z をすべて求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①まずは幾何的に考える → ②一旦 z のままで → ③無理そうなら成分や極形式に。

► Point 6-1-1

→ ①幾何では読みにくい。→ ② z のままで何かできないか。

$|z| = 1$ という条件が効く形にしたい。→ $z\bar{z} = 1$ 、すなわち $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 。

► Point 6-1-5

→ $z^2 - z + 1$ を見ると、 z でくくれるのでは？ → $z^2 - z + 1 = z \left(z - 1 + \frac{1}{z} \right)$ 。

→ $|z| = 1$ なので $|z \cdot (\quad)| = |(\quad)|$ 。→ $\left| z + \frac{1}{z} - 1 \right|$ を調べればよい。

→ ここで $z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2 \cos \theta$ と実数になる。→ 中身がまるごと実数になった。

→ よって $|2 \cos \theta - 1|$ の最大最小。→ $\cos \theta$ が -1 から 1 まで動くので、 $2 \cos \theta - 1$ は -3 から 1 まで。→ 絶対値の最大は 3 、最小は 0 。

→ 最小が 0 になるのは、 $z^2 - z + 1 = 0$ を満たす z が単位円上にあるということ。→ 実際その解は $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ で絶対値 1 。→ つじつまが合う。

(3) → (1) が効くと、 $|2 \cos \theta - 1| = 1$ というただの三角方程式になる。

→ 絶対値をはずすと $2 \cos \theta - 1 = \pm 1$ 。→ $\cos \theta = 1$ または $\cos \theta = 0$ 。

→ $0 \leq \theta < 2\pi$ で $\cos \theta = 1$ は $\theta = 0$ 、 $\cos \theta = 0$ は $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 。→ 3 個。

→ z に直すと $1, i, -i$ 。→ 代入して確かめると、順に $1, -i, i$ でどれも絶対値 1 。→ 検算が通った。

→ (1) を作っておくと (2)(3) がどちらもただの $\cos \theta$ の話になる。誘導の意味はここにある。

方針の候補

○ z でくくって $\left| z + \frac{1}{z} - 1 \right|$ に直し、 $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ が実数になることを使う。► Point 6-1-5

△ $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を代入し、実部と虚部を計算して絶対値の 2 乗を θ の式にする … 通る。
 $|z^2 - z + 1|^2$ を展開すると $\cos \theta$ の 2 次式になるので、平方完成で最大最小が出る。確実だが計算量が多い。

△ $z^2 - z + 1 = \frac{z^3 + 1}{z + 1}$ ($z \neq -1$) と書き直す … 通る。 $|z^3 + 1|$ と $|z + 1|$ をそれぞれ θ で表して割る。 $z = -1$ のときは別に調べる。 3 乗根の形が見えるのはおもしろいが、場合分けが増える。

× $|z^2 - z + 1| \leq |z|^2 + |z| + 1 = 3$ として最大値 3 、 $\geq |z|^2 - |z| - 1$ として最小値を出す … 上からの評価は正しく、等号も成立するので最大値は合う。しかし下からの評価は -1 となり、絶対値の最小値としては意味をなさない。最小値はこの方法では出ない。

■ 解答

(1) $|z| = 1$ より $z \neq 0$ で、 $z\bar{z} = |z|^2 = 1$ すなわち $\bar{z} = \frac{1}{z}$ である。

z でくくると

$$z^2 - z + 1 = z \left(z - 1 + \frac{1}{z} \right)$$

$|z| = 1$ であるから

$$|z^2 - z + 1| = |z| \cdot \left| z + \frac{1}{z} - 1 \right| = \left| z + \frac{1}{z} - 1 \right|$$

ここで $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと $\frac{1}{z} = \bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$ であるから

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$$

これは実数である。よって

$$|z^2 - z + 1| = |2 \cos \theta - 1|$$

(2) $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より $-3 \leq 2 \cos \theta - 1 \leq 1$ であり、 $2 \cos \theta - 1$ はこの範囲のすべての値をとる。したがって $|2 \cos \theta - 1|$ のとりうる値の範囲は $0 \leq \cdot \leq 3$ で

最大値 **3** ($\theta = \pi$, すなわち $z = -1$), 最小値 **0** ($\cos \theta = \frac{1}{2}$, すなわち $z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$)

(最小値 0 は $z^2 - z + 1 = 0$ を意味する。実際この方程式の解は $z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ で、絶対値は 1。たしかに条件を満たしている。)

(3) (1) より、条件は

$$|2 \cos \theta - 1| = 1 \iff 2 \cos \theta - 1 = 1 \text{ または } 2 \cos \theta - 1 = -1$$

すなわち $\cos \theta = 1$ または $\cos \theta = 0$ 。 $0 \leq \theta < 2\pi$ でこれを解くと

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

対応する z は

$$z = 1, i, -i$$

(検算: $z = 1$ のとき $z^2 - z + 1 = 1$, $z = i$ のとき $-1 - i + 1 = -i$, $z = -i$ のとき $-1 + i + 1 = i$ 。いずれも絶対値 1。)

別の方針でも解いてみる (略解)

△ 極形式を代入して 2 乗で押す道

$z = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると $z^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ だから

$$z^2 - z + 1 = (\cos 2\theta - \cos \theta + 1) + i(\sin 2\theta - \sin \theta)$$

絶対値の 2 乗を計算すると、 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ と加法定理で整理して $(2 \cos \theta - 1)^2$ になる。→ 同じ結論に到達する。確実だが計算が長い。「 z でくくる」ひと手間で、この計算が丸ごと消える。

△ 3 乗根の形に読みかえる道

$z \neq -1$ のとき $z^2 - z + 1 = \frac{z^3 + 1}{z + 1}$ 。→ 最小値 0 は $z^3 = -1$ かつ $z \neq -1$ 、すなわち -1 の 3 乗根のうち虚数のもののとき。→ $z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ が出る。 $z = -1$ のときは直接代入して 3。→ 同じ結論に到達する。
 答えの意味（どの点で 0 になるか）が見えるのが利点。

この問題で身につくこと

- $|z| = 1$ ときたら $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 。この 1 本で式がぐっと軽くなる。
- z でくくると $\left| z + \frac{1}{z} - 1 \right|$ になり、中身が実数になる。ここが本問の一手。
- $z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2 \cos \theta$ は実数。実数になれば、あとはただの 1 変数の最大最小。
- 三角不等式で上からは押さえられても、下からは意味のある評価にならないことがある。最小値は別に出す。
- 最小値が 0 になったら、中身が 0 になる点が条件を満たすかを確かめる。ここで答えの裏づけがとれる。
- いったん $|2 \cos \theta - 1|$ の形にしておくと、最大最小も方程式も同じ道具で片づく。誘導の (1) はそのための下ごしらえ。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 6-1-5 複素数の大きさは 2 乗！

（本文は問 3 参照）

Point 6-1-7 極形式

（本文は問 6 参照）