

この見本について

高校数学の俯瞰 – 演習セット – 数学III C 第4章「積分法」

これは**見本**です。実際の商品から4問だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ4問

- 前半の3問 … 方針の候補が多い問題や、別解を複数紹介できる問題を選びました。
- 最後の1問 … 章末の【入試対策 実戦 Point 活用演習】からです。入試レベルで、(1)(2)(3)の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて ②目次 ③問題編 ④答え一覧 ⑤解説編 の順に入っています。
- 解説は「問題を見て思うこと」→「方針の候補 (○△×)」→「解答」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」の順です。
- 使った Point は本編の該当箇所をそのまま載せているので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 10 次の (1)～(3) について、置換積分の暗算テクニック I～Ⅲのうち使えるものを挙げ、それを用いて積分せよ。使えないものについては、その理由を述べよ。2 つとも使える場合は、どちらの方針でも解いたうえで、2 つの解法を比較せよ。

$$(1) \int (3x+2)^7 dx \quad (2) \int \frac{x}{x^2+1} dx \quad (3) \int x^2 e^{x^3} dx \quad (\text{Point 4-2-7})$$

問 22 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{(\log x)^3}{x} dx \quad (2) \int \frac{\log x}{x^2} dx \quad (3) \int (\log x)^2 dx \quad (\text{Point 4-3-7})$$

問 41 $x > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

(Point 4-5-5)

【入試対策 実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 89 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を $0 \leq x \leq \pi$ で連続な関数とすると、 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ が成り立つことを示せ。

(2) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ を求めよ。

(3) $\int_0^\pi \frac{x}{1 + \sin x} dx$ を求めよ。 (Point 4-6-2)

解説編（見本）

問 10

次の (1)～(3) について、置換積分の暗算テクニック I～Ⅲのうち**使えるものを挙げ、それを用いて積分せよ**。使えないものについては、その理由を述べよ。2 つとも使える場合は、**どちらの方針でも解いたうえで、2 つの解法を比較せよ**。

$$(1) \int (3x+2)^7 dx \quad (2) \int \frac{x}{x^2+1} dx \quad (3) \int x^2 e^{x^3} dx$$

問題を見て思うこと

章のフロー：原始関数を知っているのは 8 つだけ。それ以外は i) 置換積分か ii) 部分積分でその 8 つに帰着させる。**積と商の解消**を目指すとうまくいきやすい。▶ Point 4-1-3

→ まず**知っている** 8 つに当てはまるかを見て、当てはまらなければ**置換か部分積分**でそこに落としに行く。

3 つの暗算テクニックは、どれも「置換すると一瞬で終わる形」を型として覚えたもの。**どの型かを見分ける手順**は決まっている。▶ Point 4-2-7

まず**カタマリ**を探す。次にその**カタマリ**を微分して、微分したものが式の中にあるかを見る。無ければ I（中身が 1 次）かどうかを見る。分数なら**分母の微分が分子か**を見る。▶ Point 4-2-8

▶ Point 4-2-9

(2) は分数なので Ⅲ が思い浮かぶが、分母 x^2+1 の微分 $2x$ が分子 x の 2 倍。定数倍のずれは調整できるので Ⅲ が使える。同時に、カタマリ x^2+1 の微分 $2x$ が掛かっているとみれば Ⅱ でもある。どちらでも通りそうだ。

方針の候補

○ (1) は中身が 1 次なので I。▶ Point 4-2-7

○ (2) はⅡでもⅢでも通る。▶ Point 4-2-8 ▶ Point 4-2-9

○ (3) はカタマリ x^3 の微分 $3x^2$ が掛かっているのでⅡ。▶ Point 4-2-8

× (3) を I とみる … カタマリ x^3 が 1 次式ではないので、定数で割る補正は使えない。

△ (1) をⅡとみる … 通る。 $\frac{1}{3}$ を掛けて $\frac{1}{3} \int (3x+2)^7 \cdot 3 dx$ とすれば、カタマリの微分がそろろう。I はこれを暗算で済ませたものにあたる。

解答

(1) 中身 $3x+2$ が 1 次式なので **I が使える**。 x の係数 3 で割って

$$\int (3x+2)^7 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+2)^8}{8} + C = \frac{(3x+2)^8}{24} + C$$

なお、カタマリの微分は 3（定数）なので、 $\frac{1}{3}$ を掛けて $\frac{1}{3} \int (3x+2)^7 \cdot 3 dx$ と書けば **Ⅱ でも通る**。実

際 I は、カタマリが 1 次のときの II を、置換を書かずに済ませたものである。分数の形ではないので、この形のままでは III の形には当てはまらない。

(2) II でも III でも解ける。

[II で解く] カタマリを $x^2 + 1 = t$ とおくと $dt = 2x dx$ 、すなわち $x dx = \frac{1}{2} dt$ であるから

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log |t| + C = \frac{1}{2} \log (x^2 + 1) + C$$

[III で解く] 分母 $x^2 + 1$ の微分は $2x$ で、分子 x の 2 倍である。 $\frac{1}{2}$ を外に出して

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \log (x^2 + 1) + C$$

いずれも $\frac{1}{2} \log (x^2 + 1) + C$ ($x^2 + 1 > 0$ より絶対値は不要)。

[2つの解法の比較] II では t を導入して dx を dt に直す行が要るので、書く行数は 1 行多い。III では分子を分母の微分にそろえるために $\frac{1}{2}$ を外に出す一手が要る。用意するものの数はどちらも 1 つで、同じ変形を別の言葉で書いているだけである。実際、III の公式は II で $f(t) = \frac{1}{t}$ とした場合にあたる。差は「どちらが優れているか」ではなく、**分数を分数のまま扱うか、いったん文字に逃がすか**という書き方の違いにある。

(3) カタマリを x^3 とみると $(x^3)' = 3x^2$ で、これは掛かっている x^2 の 3 倍。II が使える。 $x^3 = t$ とおくと $dt = 3x^2 dx$ であるから

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

カタマリ x^3 が 1 次式ではないので、**定数で割る補正 (I)** は使えない。分数の形ではないので、この形のままでは III の形には当てはまらない。

この問題で身につくこと

- ・見分けの手順は①カタマリを探す ②微分する ③それが式の中にあるか見る。無いときだけ、中身が 1 次かを見る。
- ・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。(2) のように、同じ式が 2 つの型として読めることがある。(1) も、定数倍を補えば II として読める。
- ・III は II の特別な場合。 $f(t) = \frac{1}{t}$ とすれば III になる。3 つを別物として覚えるより、II を中心に据えて枝分かれとみるほうが忘れにくい。
- ・定数倍のずれは調整できるが、 x の式のずれは調整できない。ここが I と II を分ける境目である。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 4-2-7 置換積分の暗算テクニック I (1 次のカタマリ型)

(本文は問 7 参照)

Point 4-2-8 置換積分の暗算テクニック II (後ろに微分がかかっている型)

(本文は問 8 参照)

Point 4-2-9 置換積分の暗算テクニック III (分子が分母の微分型)

(本文は問 1 参照)

問 22

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{(\log x)^3}{x} dx \quad (2) \int \frac{\log x}{x^2} dx \quad (3) \int (\log x)^2 dx$$

問題を見て思うこと

章のフロー：原始関数を知っているのは8つだけ。それ以外は i) 置換積分か ii) 部分積分でその8つに帰着させる。**積と商の解消**を目指すとうまくいきやすい。

▶ Point 4-1-3

→ まず**知っている**8つに当てはまるかを見て、当てはまらなければ**置換か部分積分**でそこに落としに行く。

$\log$ がからむ積分は**置換か部分積分**のどちらか。見分けは $\frac{1}{x}$ が掛かっているかで付く。

▶ Point 4-3-7

(1) $\frac{1}{x}$ が掛かっている。 $\log x = t$ とおけば $dt = \frac{1}{x} dx$ でぴったり。→ 置換。

(2) 掛かっているのは $\frac{1}{x^2}$ で、 $\log x$ の微分ではない。→ 置換では進まないなので部分積分。 $\log$ は微分側。

▶ Point 4-2-11

(3) $\log$ の2乗。相方は1。1回部分積分すると $\log$ の1乗が出るので、**もう1回**やれば終わるのでは？

方針の候補

○ (1) は $\frac{1}{x}$ が掛かっているので $\log x = t$ の置換。 ▶ Point 4-3-7

○ (2)(3) は部分積分で $\log$ を微分側に。 ▶ Point 4-2-11

× (2) を $\log x = t$ と置換する $\dots dx = x dt = e^t dt$ となり、 $\int te^{-t} dt$ に変わる。行き止まりではないが、結局そこで部分積分が要る。

△ (3) を $\log x = t$ と置換する $\dots \int t^2 e^t dt$ になり、部分積分2回で解ける。回り道だが通る。

解答

(1) $\log x = t$ とおくと $dt = \frac{1}{x} dx$ であるから

$$\int \frac{(\log x)^3}{x} dx = \int t^3 dt = \frac{(\log x)^4}{4} + C$$

(2) $\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)'$ であるから、部分積分により

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{x^2} dx &= -\frac{\log x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

(3) $(\log x)^2 = (x)'(\log x)^2$ とみて部分積分すると

$$\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx$$

$\int \log x dx = x \log x - x + C_1$ であるから

$$\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C$$

別の方針でも解いてみる（略解）

△ (3) を $\log x = t$ と置換する

$\log x = t$ とおくと $x = e^t$ 、 $dx = e^t dt$ であるから

$$\int (\log x)^2 dx = \int t^2 e^t dt$$

これは問 12 と同じ型で、部分積分を 2 回行くと $(t^2 - 2t + 2)e^t + C$ 。 $t = \log x$ 、 $e^t = x$ を戻すと $x \{(\log x)^2 - 2 \log x + 2\} + C$ となる。 → 同じ結果を得る。置換して x を e^t に直す一手が増えるが、 $\log$ が消えて見通しはよくなる。

この問題で身につくこと

- ・ $\frac{1}{x}$ が掛かっていれば置換、いなければ部分積分。 $\log$ の積分はこの二択で決まる。
- ・ 部分積分では $\log$ は必ず微分側。微分すると $\frac{1}{x}$ になって、相方と約分される。
- ・ $\log$ の n 乗は部分積分 n 回。 x^n のときと同じで、微分するたびに次数が下がる。
- ・ (2) のように相方が $\frac{1}{x^2}$ のときは、積分側を $-\frac{1}{x}$ にとる。符号を落としやすいので注意。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 4-3-7 対数関数の積分攻略

- 置換積分 ・ $\int (\log x \text{ の式}) \frac{1}{x} dx$ は $\log x = t$ の置換が頻出。
- 部分積分 ・ $\log x$ の積分は相方を見つけて部分積分。

Point 4-2-11 $\log x$ の積分は 1 を相方に部分積分

（本文は問 13 参照）

Point 4-2-10（不定積分の）部分積分

（本文は問 11 参照）

問 41

$x > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

問題を見て思うこと

不等式の証明の原則は **(大) - (小) ≥ 0 を示す** こと。関数とみて最小値を調べる道がまず思い浮かぶ。

▶ Point 4-5-5

ただし、この不等式は 2 本を別々に示す必要があり、微分も 2 回。もう少し楽な見方は無いか。
 $\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ と書けることに気づけば、**被積分関数をはさむ**だけで 2 本同時に出るのでは？

▶ Point 4-5-4

$0 < t < x$ のとき $1 < 1+t < 1+x$ だから $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+t} < 1$ 。この 3 つを 0 から x まで積分すれば、そのまま目的の不等式になる。

方針の候補

○ $\log(1+x)$ を定積分で表し、被積分関数をはさんで積分する。 ▶ Point 4-5-4

△ $f(x) = x - \log(1+x)$ 、 $g(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$ において、それぞれ微分して増減を調べる … 通る。標準的な道だが、関数を 2 つ用意して微分と増減表も 2 つ書くことになる。

解答

$x > 0$ とする。 $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \left[\log(1+t) \right]_0^x = \log(1+x)$ である。

いま $0 < t < x$ のとき $1 < 1+t < 1+x$ であるから

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+t} < 1$$

この 3 辺を t について 0 から x まで積分すると、等号は常には成り立たないから

$$\int_0^x \frac{dt}{1+x} < \int_0^x \frac{dt}{1+t} < \int_0^x dt$$

左辺は $\frac{x}{1+x}$ 、中央は $\log(1+x)$ 、右辺は x であるから

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

別の方針でも解いてみる (略解)

△ 差をとって微分する

$f(x) = x - \log(1+x)$ とすると $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$ ($x > 0$)。よって f は増加で $f(0) = 0$ だから $f(x) > 0$ 、すなわち $\log(1+x) < x$ 。

$g(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$ とすると $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$ 。よって g は増加で $g(0) = 0$ だから $g(x) > 0$ 。
 → 同じ不等式を得る。関数を 2 つ用意する分だけ書く量は増えるが、**定積分の表示を思い浮かなくても進める**という利点がある。

この問題で身につくこと

- ・不等式の証明の原則は **(大) - (小) ≥ 0** 。因数分解、平方完成、最小値、有名不等式の順に手を探す。
- ・数Ⅲでは**定積分ではさむ**という手が加わる。 $\log$ や $\arcsin$ のように、**定積分で書ける関数**のときに強い。
- ・不等式を積分するときは**等号がいつ成り立つか**に注意する。区間全体で一致していない限り、積分後は狭義の不等号になる。
- ・ $\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$ は覚えておく価値がある。 $\log$ がらみの評価はこれ一本でかなり片づく。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 4-5-5 不等式の証明のまとめ【完全版】

不等式 大 $\geq$ 小 の証明ときたら… 原則：大 - 小 ≥ 0 を示す。方針立てのテクニックは

- まずは因数分解を考える (積の形を作る)
- 2 乗の和を作る (平方完成。 (実数) $^2 \geq 0$ 利用)
- 関数と見て、最小値 ≥ 0 を示す (その際グラフは比べやすいグラフで比べる)
- 有名不等式利用 ((実数) $^2 \geq 0$ 、相加相乗、コーシー・シュワルツ、三角不等式 など)

※ 数Ⅲ履修者は、**定積分で表して被積分関数をはさむ**道も加わる。

Point 4-5-4 定積分と不等式

(本文は問 40 参照)

問 89

次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を $0 \leq x \leq \pi$ で連続な関数とすると、 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ が成り立つことを示せ。 (2) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ を求めよ。 (3) $\int_0^\pi \frac{x}{1 + \sin x} dx$ を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：原始関数を知っているのは 8 つだけ。それ以外は i) 置換積分か ii) 部分積分でその 8 つに帰着させる。**積と商の解消**を目指すとうまくいきやすい。

▶ Point 4-1-3

→ まず素直に手を出してみる。→ 分子に x があるので部分積分？ → $\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$ の原始関数は $-\arctan(\cos x)$ の形で、**高校の範囲では書けない**。→ この道は使えない。

→ 置換は？ → $\cos x = t$ とおくと $\sin x dx$ は処理できるが、**分子の x が t で書けない**。→ これも詰まる。

→ ということは、**原始関数を求めない道**を探す。→ 定積分ならではの手。

→ 定積分ならではの手といえば **King Property** ($x \rightarrow a + b - x$ の置換)。

▶ Point 4-6-2

→ 使える合図は**区間の端の和が**、 $\sin$ や $\cos$ の**対称性と噛み合うこと**。→ ここでは $0 + \pi = \pi$ で、 $\sin(\pi - x) = \sin x$ 、 $\cos(\pi - x) = -\cos x$ 。→ ぴったり噛み合う。

→ 置換すると、 x が $\pi - x$ に変わるだけで、**他はそのまま**。→ もとの I と足せば x が消えて π になる。

→ 残るのは $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ 。→ これは $\cos x = t$ の置換で片づく。→ さらに $t = \tan \theta$ が必要そう。2 段階になる。

→ ここまでが (1)(2)。→ (1) はその置換を「 $f(\sin x)$ 」という一般の形で書いておくれ。→ 中身を f にしても、証明は 1 行も変わらない。

→ ただし $f(\sin x)$ でなければならないのはなぜか。→ $\sin(\pi - x) = \sin x$ で $\sin$ が置換で**不変**だから。→ $\cos$ だと符号が変わるので、この形にはできない。

→ (2) の被積分関数は $1 + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$ と書ける。→ $\sin$ **だけの式**になるので (1) が使える。→ ここが (1) と (2) のつなぎ目。

(3) → $\frac{1}{1 + \sin x}$ も $\sin$ **だけの式**。→ (1) がそのまま使える。→ 残るのは $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \sin x}$ 。

→ この積分は**分母を有理化する**のが一手。→ $\frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$ になる。→ ただし $x = \frac{\pi}{2}$ で分母が 0 になるので、扱いに注意。

→ もっと安全なのは**原始関数を当てにいく道**。→ $-\frac{\cos x}{1 + \sin x}$ を微分してみる。→ ちょうど $\frac{1}{1 + \sin x}$ になる。→ 途切れがなく、そのまま代入できる。

方針の候補

- $x \rightarrow \pi - x$ の置換 (King Property) で I を 2 本作り、足して x を消す。 ▶ Point 4-6-2

△ $\cos x = t$ とおいてから、残った x を t で書き直そうとする … $x = \arccos t$ となり**高校の範囲では扱えない**。 x を残したまま処理する道 (King Property) に切りかえる。

× 部分積分で x を微分側にする … 相方 $\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$ の原始関数が**高校の範囲では書けない**ので、この形のままで部分積分の式が立たない。原始関数を求めない方針に切りかえるのが正しい判断である。

■ 解答

(1) $J = \int_0^\pi x f(\sin x) dx$ とおく。 $x = \pi - u$ と置換すると $dx = -du$ で、 $x : 0 \rightarrow \pi$ のとき $u : \pi \rightarrow 0$ 。 また $\sin(\pi - u) = \sin u$ であるから

$$J = \int_\pi^0 (\pi - u) f(\sin u) (-du) = \int_0^\pi (\pi - u) f(\sin u) du$$

文字を x に書き直して辺々加えると

$$2J = \int_0^\pi \{x + (\pi - x)\} f(\sin x) dx = \pi \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

よって

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

(2) $1 + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$ であるから、 $f(t) = \frac{t}{2 - t^2}$ とおくと被積分関数は $x f(\sin x)$ の形になる。 よって (1) が使える。(以下、(1) の議論を本問に即して書き下しておく。)

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

とおく。 $x = \pi - u$ と置換すると $dx = -du$ で、積分区間は

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \pi \\ \hline u & \pi \rightarrow 0 \end{array}$$

また $\sin(\pi - u) = \sin u$ 、 $\cos(\pi - u) = -\cos u$ より $1 + \cos^2(\pi - u) = 1 + \cos^2 u$ であるから

$$I = \int_\pi^0 \frac{(\pi - u) \sin u}{1 + \cos^2 u} (-du) = \int_0^\pi \frac{(\pi - u) \sin u}{1 + \cos^2 u} du$$

文字を x に書き直して辺々加えると

$$2I = \int_0^\pi \frac{x \sin x + (\pi - x) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

右の積分を求める。 $\cos x = t$ とおくと $-\sin x dx = dt$ で、積分区間は

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \pi \\ \hline t & 1 \rightarrow -1 \end{array}$$

であるから

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_1^{-1} \frac{-dt}{1 + t^2} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + t^2}$$

$\frac{1}{1+t^2}$ は偶関数だから

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(最後は $t = \tan \theta$ の置換による。問 87 参照。)

よって

$$2I = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} \quad \therefore I = \frac{\pi^2}{4}$$

(3) $\frac{1}{1+\sin x}$ は $\sin x$ だけの式であるから、 $f(t) = \frac{1}{1+t}$ として (1) を用いると

$$\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin x}$$

ここで

$$\left(-\frac{\cos x}{1+\sin x} \right)' = \frac{\sin x (1+\sin x) + \cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{\sin x + 1}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{1+\sin x}$$

であり、 $0 \leq x \leq \pi$ で $1+\sin x \geq 1 > 0$ だから右辺は連続である。よって

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin x} = \left[-\frac{\cos x}{1+\sin x} \right]_0^\pi = 1 - (-1) = 2$$

したがって

$$\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$$

別の方針でも解いてみる (略解)

△ 対称性を先に見て置換を決める道

$g(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ とおくと $g(\pi-x) = g(x)$ 、すなわち g は $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称。→ 一方 x のほうは $\pi-x$ に変わる。→ だから I と置換後の積分を足すと、 $x + (\pi-x) = \pi$ で定数になる。→ King Property が効く合図は、まさにこの「片方だけが動く」構造である。

△ (3) を $\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ に直す道

分母・分子に $1-\sin x$ を掛けると $\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ 。→ 原始関数は $\tan x - \frac{1}{\cos x}$ 。
→ ただし $x = \frac{\pi}{2}$ で各項が発散するので、そのまま代入してはいけない。→ $\tan x - \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x - 1}{\cos x} = -\frac{\cos x}{1+\sin x}$ とまとめ直せば途切れが消える。→ 同じ結論に到達する。式変形の途中で見かけ上の不連続が出たら、まとめ直せないかを疑う。

この問題で身につくこと

- ・原始関数が書けないと判断したら、定積分ならではの手に切りかえる。粘って部分積分しない。
- ・King Property は $x \rightarrow a+b-x$ の置換。合図は「区間の端の和が、三角関数の対称性と噛み合うこと」。
- ・置換後の積分ともとの積分を足すと x が消える。これがこの手の心臓部。
- ・残った積分は $\cos x = t$ で片づく。偶関数なら 2 倍に直すと計算が減る。
- ・ $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ は繰り返し出る値。 $t = \tan \theta$ の置換ごとと押さえておく。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 4-6-2【発展】King Property

(本文は問 58 参照)

Point 4-4-7【復習】偶関数・奇関数の定積分

(本文は問 29 参照)

Point 4-4-6 特殊な置換積分まとめ

(本文は問 27 参照)