

この見本について

高校数学の俯瞰 - 演習セット - 数学III C 第3章「微分法 (数III)」

これは**見本**です。実際の商品から 4 問だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … 方針の候補が多い問題や、別解を複数紹介できる問題を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の【入試対策 実戦 Point 活用演習】からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて ②目次 ③問題編 ④答え一覧 ⑤解説編 の順に入っています。
- 解説は「問題を見て思うこと」→「方針の候補 (○△×)」→「解答」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」の順です。
- 使った Point は本編の該当箇所をそのまま載せているので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編 (見本)

問 24 点 $(2, a)$ から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数を、定数 a の値によって分類せよ。

(Point 3-2-7)

問 39 次の 2 つの不等式を、「(大) - (小) をする」「平均値の定理を利用する」のどちらの方針でも証明せよ。そのうえで、2 つの解法を比較せよ。

(1) $x > 0$ のとき $e^x > 1 + x$ (2) $0 < a < b < \pi$ のとき $\sin b - \sin a < b - a$ (Point 3-3-3)

問 41 次の 3 問について、①グラフ利用 (微分) ②有名不等式の利用 (相加平均と相乗平均の関係)
③ $= k$ とおいて存在条件を考える のうち **使える方針それぞれで解け**。使えないものについては、その理由を述べよ。

(1) $x > 0$ のときの $f(x) = x + \frac{4}{x}$ の最小値 (2) $0 \leq x \leq \pi$ のときの $f(x) = x + 2 \cos x$ の
最大値と最小値

(3) x が実数全体を動くときの $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ の最大値と最小値 (Point 3-3-4)

【入試対策 実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 47 曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 上の点 P における接線が x 軸、 y 軸と交わる点をそれぞれ A , B とする。

(1) 線分 AB の長さの最小値を求めよ。

(2) 点 P は線分 AB の中点であることを示せ。

(3) P が C 上を動くとき、線分 AB が通過する領域を図示せよ。 (Point 3-2-1)

解説編 (見本)

問 24

点 $(2, a)$ から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数を、定数 a の値によって分類せよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：微分のテーマは 5 つ。①接線 ②増減・極値 ③グラフ ④方程式・不等式 ⑤最大最小 (数Ⅲではこれに⑥速度・近似が加わる)。▶ 微分法の全体像

→ この問題は①接線 (本数は④解の個数に化ける)。

$2^3 - 3 \cdot 2 = 2$ なので、 $a = 2$ 以外では点 $(2, a)$ は曲線上にない。曲線上にない点から引く接線なので、まず接点を $(t, t^3 - 3t)$ とおくのが定石。▶ Point 3-2-3

そのうえで「接線が点 $(2, a)$ を通る」を代入すれば、 t の方程式が出る。求めたいのは接線の本数だが、3 次関数では接点と接線が 1 対 1 に対応するので、 t の実数解の個数を数えればよいのでは？▶ Point 3-2-7

t の 3 次方程式に a が入る形になりそう。文字定数 a が入った方程式の解の個数といえば、 a を分離して「曲線と横直線の交点」に読み替えるのが早そう。

方針の候補

- 接点を $(t, t^3 - 3t)$ とおいて接線を作り、点 $(2, a)$ を通る条件から t の方程式を立てる … 曲線上にない点からの接線の定石。▶ Point 3-2-3
- 得られた t の方程式を $a = (t \text{ の式})$ と定数分離し、 $y = (t \text{ の式})$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数を数える … a が動いても曲線は動かないので、場合分けが機械的に済む。
- △ t の 3 次方程式のまま扱う … 解の個数は調べられる。ただし a が入ったままでは因数が見えず、 a の値で場合分けしながら増減を追うことになって手数が増える。
- × t の実数解の個数ではなく、そのまま「接線の本数」を数えようとする … 対応関係を確認しないまま数えることになる。3 次関数では 1 対 1 なのでよいが、その一言は必要。

解答

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ とおくと } f'(x) = 3x^2 - 3.$$

接点を $(t, t^3 - 3t)$ とおくと、この点における接線の方程式は

$$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t)$$

これが点 $(2, a)$ を通るから

$$a - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(2 - t)$$

$$a = t^3 - 3t + 6t^2 - 3t^3 - 6 + 3t = -2t^3 + 6t^2 - 6$$

3 次関数では接点と接線が 1 対 1 に対応するから、求める接線の本数は、 t の方程式

$$a = -2t^3 + 6t^2 - 6$$

の実数解の個数に等しい。

$$g(t) = -2t^3 + 6t^2 - 6 \text{ とおくと}$$

$$g'(t) = -6t^2 + 12t = -6t(t - 2)$$

であるから $g'(t) = 0$ となるのは $t = 0, 2$ 。増減表は

t	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2	$\searrow$

また $t \rightarrow -\infty$ のとき $g(t) \rightarrow \infty$ 、 $t \rightarrow \infty$ のとき $g(t) \rightarrow -\infty$ である。

よって曲線 $y = g(t)$ と直線 $y = a$ の共有点の個数は、 a の値により次のようになる。

$$\begin{array}{ll} a < -6 \text{ または } a > 2 & 1 \text{ 個} \\ a = -6 \text{ または } a = 2 & 2 \text{ 個} \\ -6 < a < 2 & 3 \text{ 個} \end{array}$$

したがって、引ける接線の本数は

$$a < -6, a > 2 \text{ のとき } 1 \text{ 本; } a = -6, a = 2 \text{ のとき } 2 \text{ 本; } -6 < a < 2 \text{ のとき } 3 \text{ 本}$$

別の方針でも解いてみる (略解)

△ t の 3 次方程式のまま扱う

$F(t) = 2t^3 - 6t^2 + 6 + a$ とおくと、方程式は $F(t) = 0$ 。 $F'(t) = 6t(t - 2)$ より極大値は $F(0) = a + 6$ 、極小値は $F(2) = a - 2$ 。3 次方程式の実数解の個数は (極大値) $\times$ (極小値) の符号で決まり、 $(a + 6)(a - 2) < 0$ すなわち $-6 < a < 2$ で 3 個、 $(a + 6)(a - 2) = 0$ すなわち $a = -6, 2$ で 2 個、 $(a + 6)(a - 2) > 0$ で 1 個。→ 同じ分類を得る (定数分離と違い、 a を含んだまま極値を評価することになる)。

この問題で身につくこと

- ・接線の本数は接点 t の個数に読み替える。これが接線の本数問題の背骨。
- ・ただし読み替えが成り立つのは 3 次までが基本。4 次以上では 1 本の接線が 2 点で接することがあり、接点の個数と接線の本数がずれる。ひと言確認を入れておくと安全。
- ・ a を含む方程式の解の個数は、 $a = (t \text{ の式})$ と分離して横直線との交点に直すと、境界が極値の値としてそのまま読める。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 3-2-7【有名問題】接線の本数問題

- ・接点を $(t, f(t))$ において、接線を数式化。

基本 (接点 t の個数) = (接線の本数) であるので、 t についての方程式の解の個数を調べる！

※ 4 次関数以上だと、接点の数と接線の本数が 1 : 1 に対応しなくなるので注意！

(図：2 次曲線では接点と接線が 1 対 1 に対応する一方、4 次曲線では 1 本の直線が 2 点で接しうる。)

Point 3-2-3 曲線上にない点から引いた接線

「曲線 $y = f(x)$ 上にない定点を通る接線」ときたら……

接点 $(t, f(t))$ とおけ！

Point 3-2-1 接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は,

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

問 39

次の 2 つの不等式を、「(大) - (小) をする」「平均値の定理を利用する」のどちらの方針でも証明せよ。そのうえで、2 つの解法を比較せよ。

- (1) $x > 0$ のとき $e^x > 1 + x$ (2) $0 < a < b < \pi$ のとき $\sin b - \sin a < b - a$

問題を見て思うこと

章のフロー：微分のテーマは 5 つ。①接線 ②増減・極値 ③グラフ ④方程式・不等式 ⑤最大最小 (数Ⅲではこれに⑥速度・近似が加わる)。▶ 微分法の全体像

→ この問題は④不等式。

不等式の証明の原則は (大) - (小) > 0 を示すこと。関数とみて最大最小を調べるのが基本線。

▶ Point 3-3-3

ただし数 3 では、もう 1 本の道がある。 $f(b) - f(a)$ や $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ の形が不等式に見えているときは平均値の定理を疑う、という合図。

▶ Point 3-2-10

今回はどちらの方針でも証明せよと言われている。実際、この 2 問はどちらも両方の道で最後までたどり着ける。両方やってみて、そのうえで手数を比べるのがこの問題の趣旨だ。

(1) は $e^x - (1 + x)$ 。文字は x ひとつで、素直に差をとれば微分は $e^x - 1$ 、 $x > 0$ での符号がすぐ決まりそう。一方で $e^x - 1$ を $e^x - e^0$ と読みかえれば、区間 $[0, x]$ で平均値の定理も使えるはず。

(2) は $\sin b - \sin a$ と $b - a$ が並んでいる。これはまさに $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ の形 ($f(x) = \sin x$)。両辺を $b - a$ (> 0) で割れば平均値の定理の左辺そのもので、 $(\sin x)' = \cos x$ の範囲も分かっている。一方で $F(x) = x - \sin x$ と組みかえれば、 $F(a) < F(b)$ を示す差の方針にもなる。

方針の候補

- (1) (大) - (小) をする … 使える。 $f(x) = e^x - 1 - x$ とおくと $f'(x) = e^x - 1$ で、 $x > 0$ での符号が即決まる。端の値 $f(0) = 0$ もきれい。▶ Point 3-3-3 ▶ Point 3-2-11

- (1) 平均値の定理 … 使える。 $e^x - 1$ を $e^x - e^0$ と読みかえ、区間 $[0, x]$ に適用すれば $\frac{e^x - 1}{x} = e^c > 1$ 。読みかえの一手を自分で足す必要はあるが、そこさえ越えれば 2 行で終わる。

▶ Point 3-2-10 ▶ Point 3-2-8

- (2) (大) - (小) をする … 使える。移項して $a - \sin a < b - \sin b$ と左右に文字を分け、 $F(x) = x - \sin x$ の単調増加に帰着させる。 $F(a) < F(b)$ を示す形に組みかえる読みかえが要る。

▶ Point 3-3-6 ▶ Point 3-2-11

- (2) 平均値の定理 … 使える。 $\frac{\sin b - \sin a}{b - a}$ という平均変化率の形がそのまま見えている。 $f(x) = \sin x$ に適用すれば $\cos c$ に置きかわり、あとは $\cos c < 1$ を言うだけ。

▶ Point 3-2-10 ▶ Point 3-2-8

どちらの小問も 2 つの方針がともに使える。差が出るのは正しさではなく、読みかえに何手かかるかだ

けである。

■ 解答

(1) 差をとる方針

$f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと

$$f'(x) = e^x - 1$$

$x > 0$ のとき $e^x > e^0 = 1$ であるから $f'(x) > 0$ 。よって $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。したがって $x > 0$ のとき

$$f(x) > f(0) = e^0 - (1+0) = 0$$

すなわち $e^x > 1+x$ が成り立つ。

(1) 平均値の定理を使う方針

$g(t) = e^t$ は微分可能で $g'(t) = e^t$ である。 $x > 0$ とし、閉区間 $[0, x]$ で平均値の定理を用いると

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^c, \quad 0 < c < x$$

を満たす c が存在する。 $c > 0$ より $e^c > e^0 = 1$ であるから

$$\frac{e^x - 1}{x} > 1$$

$x > 0$ であるから、両辺に x を掛けて

$$e^x - 1 > x$$

すなわち $x > 0$ のとき $e^x > 1+x$ が成り立つ。

(2) 差をとる方針

$F(x) = x - \sin x$ とおくと

$$F'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

であり、 $F'(x) = 0$ となるのは $\cos x = 1$ すなわち $x = 0, \pm 2\pi, \dots$ という孤立した点に限る。よって $F(x)$ は実数全体で単調に増加する。

$0 < a < b < \pi$ より $a < b$ であるから

$$F(a) < F(b) \quad \text{すなわち} \quad a - \sin a < b - \sin b$$

移項して

$$\sin b - \sin a < b - a$$

が成り立つ。

(2) 平均値の定理を使う方針

$f(x) = \sin x$ は微分可能であるから、平均値の定理より

$$\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos c, \quad a < c < b$$

を満たす c が存在する。 $0 < a < b < \pi$ より $0 < c < \pi$ であり、このとき $\cos c < 1$ である。よって

$$\frac{\sin b - \sin a}{b - a} < 1$$

$b - a > 0$ であるから、両辺に $b - a$ を掛けて

$$\sin b - \sin a < b - a$$

が成り立つ。

2つの解法の比較

(1) では、差をとる方針は読みかえが要らない。文字が x ひとつで、 $f(x) = e^x - 1 - x$ とおけば $f'(x) = e^x - 1$ の符号がその場で決まる。平均値の定理でも同じ行数で終わるが、 $e^x - 1$ を $e^x - e^0$ と見て区間 $[0, x]$ をとる、という見かたの一手が先に要る。

(2) では、平均値の定理のほうが問題文の形に近い。 $\frac{\sin b - \sin a}{b - a}$ という平均変化率がそのまま現れており、 $\cos c < 1$ を言えば終わる。差をとる方針でも最後まで行けるが、2文字のうちどちらを動かすかを決め、 $F(x) = x - \sin x$ に組みかえる読みかえを先に済ませることになる。

つまり差は「どちらが優れているか」ではなく、その問題で読みかえが要るかどうかにある。 $f(b) - f(a)$ の形が見えていれば平均値の定理が近く、見えていなければ差をとるほうが素直に入れる。

この問題で身につくこと

- ・不等式の証明は入口が複数ある。今回のように、差をとっても平均値の定理でも最後まで行ける問題は珍しくない。どれか1つしか正解でない、ということはない。手が止まったら別の入口に移れるよう、両方の道筋を持っておく。
- ・そのうえで数3では $f(b) - f(a)$ の形が見えていたら平均値の定理、という合図を持っておくと、読みかえの少ない道から入れる。
- ・平均値の定理を使うときは、 c の存在範囲（ここでは $0 < c < \pi$ ）から導関数の値の範囲を押さえるのが仕事。範囲を書き忘れると $\cos c < 1$ が言えない。
- ・両辺に $b - a$ を掛ける前に $b - a > 0$ を確認している。不等号の向きに関わるので省略できない。
- ・(2) はもう1つの見かたができる。1文字固定（予選決勝）である。 a を止めて b だけを動かすと $g(b) = (b - \sin b) - (a - \sin a)$ は $g'(b) = 1 - \cos b \geq 0$ より増加し、 $b \rightarrow a$ で0に近づくから $g(b) > 0$ 。ここでは $a < b$ という大小関係の束縛があるので、 a, b は独立ではない（ b の動ける範囲が a で決まる）。それでも1文字固定は使える。1文字固定が向かないのは、 $a + b = 1$ のような等式の束縛があるときで、そのときは1文字消去して1変数にするほうが素直である。なお上の「差をとる方針」と計算はまったく同じで、見かたの名前が違うだけである。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 3-3-3 不等式の証明

不等式（大） $\geq$ （小）の証明ときたら…

→原則：（大）－（小） ≥ 0 を示す！

方針立てのテクニックは…

(i) まずは因数分解を考える。（積の形を作る）

(ii) 2乗の和を作る。（平方完成）（(実数) $^2 \geq 0$ 利用）

(iii) 関数と見て、最大最小を考える。（その際グラフは比べやすいグラフで比べる）

(iv) 有名不等式利用 ($(\text{実数})^2 \geq 0$ 、相加相乗、コーシー・シュワルツ、三角不等式 etc...))

※他にも、整数や数列など自然数 n に関する不等式では代入して実験、帰納法なども。

具体例は数学Ⅱ BC「不等式の証明」に (i)~(iv) それぞれ載せている。

数 3 履修者は... 平均変化率 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ や、 $f(b)-f(a)$ のような形を含む不等式、極限ときたら $\rightarrow$ 平均値の定理利用を疑え！ (極限の際、微分係数の定義利用も忘れがち)

※難易度は高いが他にも面積評価や凸不等式などがある。(完全版は積分編の Point「不等式の証明のまとめ【完全版】」へ)

Point 3-3-6【発展】一般化 —— 2 つの数を 1 つの関数の値とみる

2 つの数の大小や、2 文字の等式が問われたら...

$\rightarrow$ 両者を $f(a)$, $f(b)$ のように同じ関数に別の値を入れた形にそろえられないかを疑う！

そこまで持ち込めれば、あとは f の増減 (と極値) だけで片づく。合図は同じ形が 2 回現れていること。関数の作り方は主に次の 3 つ。

(i) 移項して、左右に文字を分ける。(例: $\sin b - \sin a < b - a \iff a - \sin a < b - \sin b$ より $f(x) = x - \sin x$)

(ii) 両辺の対数をとる。(底と肩が入れ替わっている形。例: e^π と π^e 、 $a^b = b^a$ より $f(x) = \frac{\log x}{x}$)

(iii) 自然数を実数に広げる。(n が 2 箇所に現れる形。例: $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$)

Point 3-3-3「関数と見て、最大最小を考える」の特殊パターンにあたる。

Point 3-2-8 平均値の定理

(本文は問 25 参照)

Point 3-2-10 平均値の定理の利用 (合図)

(本文は問 26 参照)

Point 3-2-11 関数の増減

(本文は問 27 参照)

問 41

次の 3 問について、①グラフ利用 (微分) ②有名不等式の利用 (相加平均と相乗平均の関係)

③ $= k$ とおいて存在条件を考える のうち **使える方針それぞれで解け**。使えないものについては、その理由を述べよ。

(1) $x > 0$ のときの $f(x) = x + \frac{4}{x}$ の最小値 (2) $0 \leq x \leq \pi$ のときの $f(x) = x + 2 \cos x$ の最大値と最小値

(3) x が実数全体を動くときの $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ の最大値と最小値

問題を見て思うこと

章のフロー：微分のテーマは 5 つ。①接線 ②増減・極値 ③グラフ ④方程式・不等式 ⑤最大最小 (数Ⅲではこれに⑥速度・近似が加わる)。▶ 微分法の全体像

→ この問題は⑤**最大最小**。

どれも 1 変数の最大最小。数 3 を習うと反射的に微分したくなるが、**微分は数ある候補の 1 つにすぎない**。まず引き出しを 3 つとも開けて、**どれが使えてどれが使えないかを条件を見て仕分け**るのがこの問題の仕事。

▶ Point 3-3-4

仕分けの基準ははっきりしている。②相加相乗は**各項が正で積が定数**になるときに効く。③ $= k$ とおく方針は、 k を含む**方程式が x について整理できる**ときに効く。①微分は、微分できる形なら基本的にいつでも効く。

(1) は $x + \frac{4}{x}$ 、しかも $x > 0$ 。積が $x \cdot \frac{4}{x} = 4$ で定数だから②が効きそう。分母を払えば 2 次方程式になるので③も効きそう。微分もできるから、3 つとも**使えそう**だ。

(2) は x と $\cos x$ の**混ざりもの**。積 $x \cdot 2 \cos x$ は定数にならないので②は無理。 $x + 2 \cos x = k$ は x について解けないので③も無理。残るのは①だけ。 $f'(x) = 1 - 2 \sin x$ なら符号が決まりそうだ。

(3) は**分数関数**で、分母 $x^2 + 1$ は常に正。 $y = k$ とおくと分母が払えて x の 2 次方程式になるから③が効く。商の微分もできるので①も効く。②はそのままだと分子 $x + 1$ が $x < -1$ で負になり前提が崩れるが、 $t = x + 1$ とおくと逆数が $t + \frac{2}{t} - 2$ となって**積が定数**の形が現れる。 t の正負で場合分けすれば②も使える。

方針の候補

○ (1) ①グラフ利用 (微分) … **使える**。 $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ で、 $x > 0$ では符号が $x^2 - 4$ だけで決まる。増減表を 1 つ書けば終わる。▶ Point 3-2-11

○ (1) ②有名不等式 (相加相乗) … **使える**。 $x > 0$ かつ積 $x \cdot \frac{4}{x} = 4$ が**定数**になる逆数の和で、相加相乗の典型形。等号成立の x もすぐ出る。▶ Point 3-3-4

○ (1) ③ $= k$ とおく … **使える**。分母を払って $x^2 - kx + 4 = 0$ とし、これが**正の解**をもつ k の条件を求めればよい。 $x > 0$ という制限を条件に翻訳する手間が加わる。▶ Point 3-3-4

○ (2) ①グラフ利用 (微分) … **使える**。 $f'(x) = 1 - 2 \sin x$ の符号が $\sin x$ と $\frac{1}{2}$ の大小で決まり、閉

区間なので端点と極値を比べれば終わる。▶ **Point 3-2-11**

× (2) ②有名不等式(相加相乗)… **使えない**。相加相乗が効くのは各項が正で積が定数になるときだが、 $x \cdot 2 \cos x$ は x によって変わり定数にならない。また $0 \leq x \leq \pi$ では $2 \cos x$ が負にもなるので、そもそも相加相乗の前提(両項が正)を満たさない。

× (2) ③ $= k$ とおく… **使えない**。 $x + 2 \cos x = k$ は 1 次の項と三角関数が混ざっており、 x について整理して解くことができない。存在条件を k の式に翻訳する道がない。

○ (3) ①グラフ利用(微分)… **使える**。商の微分から $y' = \frac{-(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2}$ となる。増減表に加えて $x \rightarrow \pm\infty$ の確認が要る。▶ **Point 3-2-11**

○ (3) ②有名不等式(相加相乗)… **使える(ただし置換が要る)**。そのままでは分子 $x + 1$ が $x < -1$ で負になり前提が崩れる。しかし $t = x + 1$ とおくと $\frac{1}{y} = \frac{t^2 - 2t + 2}{t} = t + \frac{2}{t} - 2$ となり、 $t \cdot \frac{2}{t} = 2$ で積が定数。 t の正負で場合分けすればよい。▶ **Point 3-3-4**

○ (3) ③ $= k$ において存在条件(逆像法)… **使える**。分母が常に正なので払え、 k についての条件が 2 次方程式の判別式に落ちる。▶ **Point 3-3-4**

解答

(1) 使える方針：①②③のすべて

(1) ②有名不等式(相加平均と相乗平均の関係)

$x > 0$, $\frac{4}{x} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 2\sqrt{4} = 4$$

等号は $x = \frac{4}{x}$ すなわち $x^2 = 4$, $x > 0$ より $x = 2$ のとき成り立つ。よって最小値 4 ($x = 2$ のとき)。

(1) ①グラフ利用(微分)

$f(x) = x + \frac{4}{x}$ ($x > 0$) を微分すると

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$x > 0$ より $x^2 > 0$, $x + 2 > 0$ であるから、 $f'(x)$ の符号は $x - 2$ の符号と一致する。よって

$$0 < x < 2 \text{ で } f'(x) < 0, \quad x = 2 \text{ で } f'(x) = 0, \quad x > 2 \text{ で } f'(x) > 0$$

すなわち $f(x)$ は $0 < x \leq 2$ で減少、 $x \geq 2$ で増加するから、 $x = 2$ で最小となり

$$f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

よって最小値 4 ($x = 2$ のとき)。

(1) ③ $= k$ において存在条件を考える

$k = x + \frac{4}{x}$ とおく。求める最小値は、この式を満たす実数 $x (> 0)$ が存在するような k の値の範囲の最小値である。 $x > 0$ より分母を払って

$$x^2 - kx + 4 = 0 \quad \cdots (*)$$

(*) が**正の解**をもつ条件を求める。(*) は x の 2 次方程式で、(解の積) $= 4 > 0$ は常に成り立つから、2 解が実数ならそれらは同符号である。したがって条件は

$$D = k^2 - 16 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad (\text{解の和}) = k > 0$$

$k^2 \geq 16$ より $k \leq -4$ または $k \geq 4$ であり、 $k > 0$ と合わせて

$$k \geq 4$$

$k = 4$ のとき (*) は $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$ となり $x = 2 (> 0)$ 。よって**最小値** 4 ($x = 2$ のとき)。

(2) 使える方針：①のみ

②は、相加相乗が効く条件である「各項が正」「積が定数」をどちらも満たさない。実際 $x \cdot 2 \cos x$ は x によって変わり定数にならず、 $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ では $2 \cos x < 0$ である。

③は、 $x + 2 \cos x = k$ が 1 次の項と三角関数の混ざった方程式で、 x について整理して解くことができない。よって「実数 x が存在する条件」を k の式として書き下せない。

(2) ①グラフ利用 (微分)

$f'(x) = 1 - 2 \sin x$ であり、 $0 \leq x \leq \pi$ において

$$f'(x) = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ では $\sin x < \frac{1}{2}$ より $f'(x) > 0$ 、 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ では $f'(x) < 0$ 、 $\frac{5}{6}\pi < x \leq \pi$ では $f'(x) > 0$ である。よって $f(x)$ は増加・減少・増加と変化する。候補の値は

$$f(0) = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}, \quad f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}, \quad f(\pi) = \pi - 2$$

$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} > \pi - 2$ (左辺は約 2.26、右辺は約 1.14) であり、 $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} < 2$ (左辺は約 0.89) であるから

$$\text{最大値 } \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \left(x = \frac{\pi}{6}\right), \quad \text{最小値 } \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} \left(x = \frac{5}{6}\pi\right)$$

(3) 使える方針：①②③のすべて

②はそのままでは前提(各項が正)を満たさないが、 $t = x + 1$ と置換すれば積が定数の形が現れ、場合分けによって使える。

(3) ③ $= k$ において存在条件を考える

$k = \frac{x+1}{x^2+1}$ とおく。求める最大値・最小値は、この式を満たす実数 x が存在するような k の値の範囲の、最大値・最小値である。 $x^2 + 1 > 0$ より分母を払って

$$k(x^2 + 1) = x + 1 \iff kx^2 - x + k - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

(i) $k = 0$ のとき (*) は $-x - 1 = 0$ となり $x = -1$ 。実数解をもつので $k = 0$ は取りうる。

(ii) $k \neq 0$ のとき (*) は x の 2 次方程式であり、実数解をもつ条件は判別式 $D \geq 0$ 。

$$D = (-1)^2 - 4k(k - 1) = -4k^2 + 4k + 1 \geq 0$$

すなわち $4k^2 - 4k - 1 \leq 0$ 。 $4k^2 - 4k - 1 = 0$ の解は

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

であるから

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq k \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \quad (k \neq 0)$$

(i)(ii) を合わせると、 k のとりうる値の範囲は

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq k \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

よって

$$\text{最大値 } \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad \text{最小値 } \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

(3) ①グラフ利用 (微分)

$y = \frac{x+1}{x^2+1}$ を商の微分法で微分すると

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - (x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

分母は正であるから、 y' の符号は $-(x^2 + 2x - 1)$ の符号と一致する。 $x^2 + 2x - 1 = 0$ の解は $x = -1 \pm \sqrt{2}$ であるから

$$y' < 0 \quad (x < -1 - \sqrt{2}), \quad y' > 0 \quad (-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}), \quad y' < 0 \quad (x > -1 + \sqrt{2})$$

よって $x = -1 - \sqrt{2}$ で極小、 $x = -1 + \sqrt{2}$ で極大となる。

$x = -1 + \sqrt{2}$ のとき $x + 1 = \sqrt{2}$, $x^2 + 1 = (3 - 2\sqrt{2}) + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$ であるから

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(4 + 2\sqrt{2})}{(4 - 2\sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2} + 4}{8} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$x = -1 - \sqrt{2}$ のとき $x + 1 = -\sqrt{2}$, $x^2 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$ であるから、同様に

$$y = \frac{-\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}(4 - 2\sqrt{2})}{8} = \frac{-4\sqrt{2} + 4}{8} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

また

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0$$

であり、 $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < 0 < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ であるから、この極限値は2つの極値の間にある。よって極大値・極小値がそのまま最大値・最小値であり

$$\text{最大値 } \frac{1+\sqrt{2}}{2} \left(x = -1 + \sqrt{2} \right), \quad \text{最小値 } \frac{1-\sqrt{2}}{2} \left(x = -1 - \sqrt{2} \right)$$

(3) ②有名不等式(相加平均と相乗平均の関係)

$t = x + 1$ とおく。 x が実数全体を動くとき t も実数全体を動き、 $x = t - 1$ であるから

$$y = \frac{t}{(t-1)^2 + 1} = \frac{t}{t^2 - 2t + 2}$$

分母 $t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$ は常に正である。

(i) $t > 0$ のとき 分母・分子を t で割って

$$y = \frac{1}{t + \frac{2}{t} - 2}$$

$t > 0$, $\frac{2}{t} > 0$ であり、積 $t \cdot \frac{2}{t} = 2$ は定数であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{2}{t}} = 2\sqrt{2}$$

等号は $t = \frac{2}{t}$ すなわち $t = \sqrt{2}$ (このとき $x = \sqrt{2} - 1$) のとき成立する。よって分母は $2\sqrt{2} - 2 (> 0)$ 以上であり

$$0 < y \leq \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$$

(ii) $t < 0$ のとき $t = -s$ ($s > 0$) とおくと

$$y = \frac{-s}{s^2 + 2s + 2} = \frac{-1}{s + \frac{2}{s} + 2}$$

同様に $s + \frac{2}{s} \geq 2\sqrt{2}$ であり、等号は $s = \sqrt{2}$ すなわち $t = -\sqrt{2}$ (このとき $x = -1 - \sqrt{2}$) のとき成立する。分母は $2\sqrt{2} + 2$ 以上で、分子が負であるから

$$\frac{-1}{2\sqrt{2} + 2} \leq y < 0, \quad \text{すなわち} \quad \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq y < 0$$

(iii) $t = 0$ のとき $y = 0$ である。

(i)(ii)(iii) を合わせて

$$\text{最大値 } \frac{1+\sqrt{2}}{2} \left(x = \sqrt{2} - 1 \right), \quad \text{最小値 } \frac{1-\sqrt{2}}{2} \left(x = -1 - \sqrt{2} \right)$$

解法の比較

(1) では、②は書く量がいちばん少ない。1 行の不等式と等号成立の確認で済み、増減表も場合分けも出てこない。①は増減表を 1 つ書き、③は「正の解をもつ」条件へ翻訳する。ただし②が使えるのは、積 $x \cdot \frac{4}{x} = 4$ が定数だと気づけたときだけで、気づかなければ①が確実に通る道になる。

(3) では、③は確かめる項目が少ない。分母を払って判別式を計算すれば k の範囲が出る。①でも解けるが、商の微分・極値の有理化・ $x \rightarrow \pm\infty$ の確認と、見るところが増える。②は $t = x + 1$ の置換に気づけば計算は短い、気づかなければ手が出ないうえ t の正負の場合分けも要る。試験で確実なのは③である。一方で③には $k = 0$ の場合分けという落とし穴があり、そこを落とすと減点される。手数が少ない道が、いつも安全とは限らない。

この問題で身につくこと

- ・最大最小はひとつの問題に複数の入口があるのが普通。(1) も (3) も①②③のどれでも解ける。どれか 1 つだけが正解、ということはないので、手が止まったら別の入口に移ればよい。
- ・一方で、使える／使えないの線引きははっきりしている。②相加相乗は各項が正で積が定数、③ $= k$ は x について整理できることが条件。(2) はこの 2 つをどちらも満たさない、①しか残らない。
- ・相加相乗は正であることと積が定数であることの 2 点が命。等号成立の確認まで書いて初めて「最小値」と言える。
- ・「いまの形で使えない」と「絶対に使えない」は違う。(3) のように置換すれば条件がそろえることがある。使えないと切り捨てる前に、一度 $t = x + 1$ のような置き換えを試してみる。
- ・ $= k$ とおく方針では、 k が 2 次の係数になるときの $k = 0$ の場合分けを忘れない。ここを落とすと減点される。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 3-3-4 関数の最大最小 全体像

まず変数の個数に注目する。変数が 2 個以上あるなら、まずは置換・消去で 1 変数関数化を目指す (特に「簡単等式」があるときは、それを使って真っ先に 1 文字消去を狙う)。

【1 変数関数のとき】方針の候補は主に次の 3 つ。

- ① グラフ利用 (直線・2 次関数・微分など。順像法)。
- ② 有名不等式利用 ((実数) $^2 \geq 0$ 、相加相乗)。分数関数の最大最小や、逆数の和 $x + \frac{a}{x}$ (a は正の定数) の最小値ときたら、まず相加相乗を疑う。できなければ③へ。
- ③ $= k$ において存在条件を考える (逆像法)。(判別式が定番)

【多変数関数のとき】置換・消去で 1 変数化が難しければ、

- ④ 予選決勝法 (文字固定)。独立な 2 変数なら、片方の文字を定数だと思ってもう一方だけを動かす。
- ②' 有名不等式利用 (②に加え、コーシー・シュワルツ、三角不等式)。
- ③' $= k$ において存在条件を考える (逆像法)。(判別式や、図示できれば線形計画法など)

※例えば 2 変数関数などでも、空間座標で直線や平面などを描くことで①のグラフ利用 (順像法) も考えられるが、描ける図が限られているため今回は除いている。

Point 3-2-11 関数の増減

(本文は問 27 参照)

問 47

曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 上の点 P における接線が x 軸、 y 軸と交わる点をそれぞれ A , B とする。

(1) 線分 AB の長さの最小値を求めよ。(2) 点 P は線分 AB の中点であることを示せ。(3) P が C 上を動くとき、線分 AB が通過する領域を図示せよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：微分のテーマは 5 つ。①接線 ②増減・極値 ③グラフ ④方程式・不等式 ⑤最大最小 (数Ⅲではこれに⑥速度・近似が加わる)。▶微分法の全体像

→ この問題は①接線で式を作り、⑤最大最小で締める。2 段階構え。

まず接点を文字でおく。 $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ($t > 0$)。→ 動くものを 1 文字にするのが出発点。

▶ Point 3-2-1

→ 接線を作って x 切片・ y 切片を出す。→ $y' = -\frac{1}{x^2}$ なので、接線は $y = -\frac{1}{t^2}(x - t) + \frac{1}{t}$ 。

→ 切片を計算すると $A(2t, 0)$, $B\left(0, \frac{2}{t}\right)$ 。→ どちらも接点の座標のちょうど 2 倍。→ きれいなので、たぶん合っている。

→ $AB^2 = 4t^2 + \frac{4}{t^2}$ 。→ 長さそのものより 2 乗のほうが扱いやすい。→ $AB > 0$ なので、 AB^2 が最小のとき AB も最小。

→ ここで気づきたい。→ $4t^2$ と $\frac{4}{t^2}$ は積が一定 (16)。→ 相加相乗がそのまま使える。微分しなくてよい。

→ もちろん微分でも出る。→ どちらで書いても同じ答えになるので、両方見ておく価値がある。

(2) → (1) で出した $A(2t, 0)$, $B\left(0, \frac{2}{t}\right)$ の中点を計算するだけ。→ $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ で、これは P そのものの。

→ この事実は $y = \frac{1}{x}$ に固有の性質。→ (3) を考えるときの見取り図になる。

(3) → ここが本番。「線分が通る」=「その点を通る線分が 1 つでもある」と読みかえる。つまり t の方程式が解をもつ条件に翻訳する。

→ 点 (X, Y) が通過されるのは、 $t > 0$ が存在して接線の式を満たすとき。→ 主役を t に取りかえるのが一手。

→ 接線は $\frac{x}{2t} + \frac{yt}{2} = 1$ と書ける (切片形)。→ 条件は $\frac{X}{t} + Yt = 2$ を満たす $t > 0$ が存在すること。

→ $X > 0$, $Y > 0$ のとき、左辺は積が一定 (XY) の 2 項の和。→ 相加相乗で最小値 $2\sqrt{XY}$ 。

→ t を動かすと左辺は $2\sqrt{XY}$ 以上のすべての値をとる。→ よって 2 に届く条件は $2\sqrt{XY} \leq 2$ 、すなわち $XY \leq 1$ 。

→ また相加相乗が出てきた。(1) と同じ道具で (3) が片づく、というのがこの問題の作りである。

→ 軸上 ($X = 0$ または $Y = 0$) は別に確かめる。→ 原点だけが除かれる。

方針の候補

- 接点を t において切片を出し、 $AB^2 = 4t^2 + \frac{4}{t^2}$ に**相加相乗**を使う。▶ **Point 3-2-1**
- 同じ式を t で微分して増減を調べる。 $s = t^2$ とおけば $4s + \frac{4}{s}$ の形になり、さらに軽くなる。
- △ AB のまま (根号つきで) 微分する … 通る。 $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ で符号は u' と同じだから、結局 AB^2 を調べるのと変わらない。**はじめから 2 乗しておくほうが式が短い。**
- (3) は「 **t の方程式が $t > 0$ に解をもつ条件**」に翻訳する。 $\frac{X}{t} + tY = 2$ の左辺の最小値を、また相加相乗で出せばよい。
- △ (3) を「接線を何本かかいて図で塗る」で片づける … 答えの見当はつくが、**境界に双曲線 $xy = 1$ が出る理由**は式で言わないと書けない。図は最後の確認に回す。
- × OA と OB をそれぞれ最小にする … $OA = 2t$ は $t \rightarrow +0$ で、 $OB = \frac{2}{t}$ は $t \rightarrow \infty$ で小さくなる。**2 つは連動して動くので、それぞれの最小を組み合わせることはできない。**

■ 解答

(1) $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ($t > 0$) とおく。 $y = \frac{1}{x}$ より $y' = -\frac{1}{x^2}$ であるから、P における接線は

$$y = -\frac{1}{t^2}(x - t) + \frac{1}{t} = -\frac{x}{t^2} + \frac{2}{t}$$

$y = 0$ とすると $x = 2t$ 、 $x = 0$ とすると $y = \frac{2}{t}$ であるから

$$A(2t, 0), \quad B\left(0, \frac{2}{t}\right)$$

よって

$$AB^2 = (2t)^2 + \left(\frac{2}{t}\right)^2 = 4t^2 + \frac{4}{t^2}$$

$t > 0$ より $4t^2 > 0$ 、 $\frac{4}{t^2} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$4t^2 + \frac{4}{t^2} \geq 2\sqrt{4t^2 \cdot \frac{4}{t^2}} = 2\sqrt{16} = 8$$

等号が成り立つのは $4t^2 = \frac{4}{t^2}$ 、すなわち $t^4 = 1$ かつ $t > 0$ より $t = 1$ のときで、これは $t > 0$ の範囲にある。

したがって $AB^2 \geq 8$ で、 $AB > 0$ より

$$AB \geq 2\sqrt{2}$$

すなわち

$$t = 1 \text{ (P(1, 1)) のとき最小値 } 2\sqrt{2}$$

(2) $A(2t, 0)$ 、 $B\left(0, \frac{2}{t}\right)$ の中点の座標は

$$\left(\frac{2t+0}{2}, \frac{0+\frac{2}{t}}{2}\right) = \left(t, \frac{1}{t}\right)$$

これは P の座標に一致する。よって

P は線分 AB の中点である

(3) 接線の式 $y = -\frac{x}{t^2} + \frac{2}{t}$ の両辺に $\frac{t}{2}$ を掛けて整理すると

$$\frac{x}{2t} + \frac{ty}{2} = 1 \iff \frac{x}{t} + tY = 2$$

線分 AB は、この直線のうち $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の部分である。したがって点 (X, Y) が線分 AB の通過する領域に属する条件は

$$X \geq 0 \text{ かつ } Y \geq 0 \text{ かつ } \left[\frac{X}{t} + tY = 2 \text{ を満たす } t > 0 \text{ が存在する} \right]$$

(i) $X > 0$ かつ $Y > 0$ のとき $\frac{X}{t} > 0$, $tY > 0$ で、その積は XY (一定) であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{X}{t} + tY \geq 2\sqrt{XY}$$

等号は $t = \sqrt{\frac{X}{Y}}$ (> 0) のときに成り立つ。また $t \rightarrow +0$ および $t \rightarrow \infty$ で左辺は ∞ に発散するので、 $t > 0$ を動かすと左辺は $2\sqrt{XY}$ 以上のすべての値をとる。よって t が存在する条件は

$$2\sqrt{XY} \leq 2 \iff XY \leq 1$$

(ii) $X = 0$, $Y > 0$ のとき $tY = 2$ より $t = \frac{2}{Y} > 0$ が存在する。よって通過する。

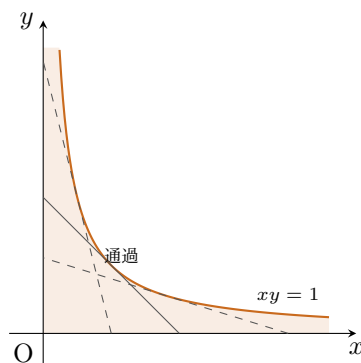
(iii) $X > 0$, $Y = 0$ のとき $\frac{X}{t} = 2$ より $t = \frac{X}{2} > 0$ が存在する。よって通過する。

(iv) $X = Y = 0$ のとき 左辺は 0 となり 2 にならないので、通過しない。

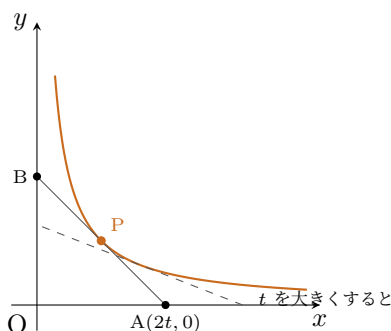
(i)~(iv) をまとめると、求める領域は

$$x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1 \text{ (ただし原点を除く)}$$

すなわち、第 1 象限で双曲線 $xy = 1$ とその下側 (境界の双曲線と両軸を含み、原点だけを除く) である。



どの接線も双曲線 $xy = 1$ に接しながら倒れていく。線分 AB が掃くのは、両軸と双曲線に囲まれた部分（原点を除く）。



接点 P は線分 AB の中点になっている ($A(2t, 0)$ 、 $B(0, \frac{2}{t})$ の中点が $(t, \frac{1}{t})$)。t をずらすと AB は倒れて長くなる。

別の方針でも解いてみる (略解)

△ 微分で押す道

$s = t^2 (> 0)$ とおくと $AB^2 = 4s + \frac{4}{s}$ 。 $\frac{d}{ds} \left(4s + \frac{4}{s} \right) = 4 - \frac{4}{s^2} = \frac{4(s^2 - 1)}{s^2}$ より $s = 1$ で最小、値は 8。
→ 同じ結論に到達する。置きかえて文字を減らしてから微分すると、4 次式を扱わずに済む。

△ 三角形の面積が一定であることに気づく道

$\triangle OAB$ の面積は $\frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{2}{t} = 2$ で、接点によらず一定。→ 面積が一定の直角三角形で斜辺を最短にするのは直角二等辺三角形のときだから、 $OA = OB$ 、すなわち $2t = \frac{2}{t}$ で $t = 1$ 。→ 同じ結論に到達する。「面積一定」という隠れた性質に気づくと、計算せずに答えの形が読める。

この問題で身につくこと

- ・接線がらみの最大最小は、接点を 1 文字でおくところから。
- ・長さは 2 乗して扱う。 $AB > 0$ なので、 AB^2 の最小がそのまま AB の最小になる。
- ・積が一定の 2 項の和が出たら相加相乗。微分せずに済むことがある。等号成立が範囲内かを必ず確認する。
- ・ t^2 をひとかたまりに置くと、4 次式が 2 次以下の形に落ちる。
- ・通過領域は「解の存在条件」に翻訳する。動くもの（ここでは t ）を主役にして、方程式が解をもつ条件を書く。
- ・その際、 t の動く範囲 ($t > 0$) に解があるかまで見る。範囲外の解は使えない。
- ・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。相加相乗・微分・図形的性質のどれでも $2\sqrt{2}$ に着く。 $\triangle OAB$ の面積が一定という性質は、覚えておくと他の問題でも効く。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 3-2-1 接線の方程式

(本文は問 18 参照)

Point 3-1-4 商の微分法

(本文は問 4 参照)