

この教材のあつかいについて

この PDF には、購入された方のお名前と注文 ID が**全ページ**に記録されています。

- 個人での学習・印刷は自由です。何部でも印刷してかまいません。
- **他の方への送信・共有・アップロードはご遠慮ください。**ファイルには購入者の情報が入っているため、共有された先から出どころが分かります。
- SNS・掲示板・ファイル共有サービスへの掲載、内容の転載はお断りします。
- **フリマアプリ・オークション・その他での販売や譲渡は固くお断りします。**購入されたご本人が使うためのものです。印刷したものについても同じです。
- 授業やクラスでお使いになる場合は、**クラスライセンス**をご用意しています。人数分の購入は不要です。

この教材は、出版社ではなく個人が一人で作っています。買ってくださる方がいるおかげで、次の章を作ることができます。他の方に配らず、必要な方はご自身で購入してください。

上記に反する行為を確認した場合は、ファイルに記録された購入者情報をもとに事実を確認のうえ、必要な対応をとります。

※ 誤りを見つけられた場合は、サイトのお問い合わせからご連絡ください。訂正版をお送りします。

問題編

問 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ を求めよ。 (Point 2-2-5, 2-2-6 ①)

問 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$ を求めよ。 (Point 2-2-5, 2-2-6 ②)

問 3 $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。 (Point 2-2-7)

問 4 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。 (Point 2-2-8)

(サンプルのため 4 問のみ。実際は章の Point 数に応じて並びます。Point 2-2-6 のようにパターンが複数あるものは、パターンごとに問題を用意します。)

答え一覧

問 1	0	問 2	0	問 3	6
問 4	3				

解説編

問 1

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ を求めよ。

問題を見て思うこと

分母の n は ∞ に飛ぶ。では分子の $\sin n$ は？ n が整数なので値はバラバラで、近づく先がない。近づく先がないなら、 $\frac{\infty}{\infty}$ でも $\frac{0}{\infty}$ でもなく、そもそも「 $\sin n$ の極限」を考えてはいけないのでは？

⇒ $\sin$ は暴れるが -1 と 1 の間からは出ない。値が求まらなくても範囲は分かるのだから、そこを使ってはさむ。

▶ Point 2-2-5

方針の候補

× $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n}{\lim_{n \rightarrow \infty} n}$ と分解する … $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ が存在しないので、性質は使えない。▶ Point 2-1-4

○ $-1 \leq \sin n \leq 1$ ではさむ … 分子は求まらないが、値の範囲は分かる。▶ Point 2-2-6 ①

解答

すべての自然数 n に対して $-1 \leq \sin n \leq 1$ であり、 $n > 0$ であるから

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

この問題で身につくこと

- ・振動する量 ÷ 無限大は、振動するほうを範囲で押さえる。 $\sin \cdot \cos \cdot (-1)^n$ はすべてこの形。
- ・ $n > 0$ を断ってから不等式を n で割る。負で割ると不等号の向きが変わるので、断りは省けない。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 2-2-5 求まらない極限

求まらない極限は、不等式で評価してはさみうち！

→ 問題によっては不等式のヒントが与えられるが、与えられないものは自力で評価！

Point 2-2-6 はさみうちや追い出し利用につながる代表的な不等式評価

- ① $-1 \leq \sin \bullet \leq 1$, $-1 \leq \cos \bullet \leq 1$ / ② $(1+t)^n$ などの二項展開を途中でちょん切る / ③ 2^n を $0 < 2^n < 3^n$ ではさむなど、底や指数の大小を考える / ④ ガウス記号 / ⑤ 接線、円弧と弦など、図形的にはさむ

問 2

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$ を求めよ。

問題を見て思うこと

n も 2^n も ∞ に飛ぶので $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形。

いつもなら「最高次で割る」だが、**多項式と指数関数は同類項にできない**。割っても $2^n/n$ が残るだけで、**形が変わっただけでは？**

⇒ 式変形で外せない不定形は、値を求めるのをあきらめて**上下からはさむ**。問1と同じ着地点だが、今度は**はさむ不等式を自分で作らない**といけない。

▶ Point 2-2-5

2^n を下から押さえたい。 $2 = 1 + 1$ と見れば二項展開が使える。

▶ Point 2-2-6 ②

方針の候補

× 極限値の性質で分解する … 分子・分母がそれぞれ発散しているので使えない。

▶ Point 2-1-4

× 分母分子を n で割る … 不定形が別の不定形に移るだけ。

○ 二項展開で 2^n を下から評価してはさむ。

▶ Point 2-2-6 ②

解答

$n \geq 3$ のとき、二項定理より

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k > {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

よって

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

この問題で身につくこと

- ・ $\frac{\infty}{\infty}$ でも、**多項式と指数**が混ざったら式変形は捨ててはさみうちへ。
- ・ 二項展開は**どの項を残すかを自分で決める**。分子の n を消したいので ${}_nC_2$ (n^2 相当) を残した。 $n \geq 3$ と断ったのは $n-1 > 0$ で割るため (極限は最初の有限個の項に影響されない)。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 2-2-6 ② 代表的な不等式評価

$(1+t)^n$ などの二項展開を途中でちょん切る。(Point 2-2-5 の本文は問1参照)

問 3

$a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

問題を見て思うこと

漸化式で定まる数列の極限。まず一般項が求まるか？

► Point 2-2-7

$a_{n+1} = pa_n + q$ の形なので特性方程式が使える。求まる型なので、あとは一般項を出して極限を計算するだけ。

解答

$\alpha = \frac{1}{3}\alpha + 4$ を解くと $\alpha = 6$ 。辺々引いて

$$a_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}(a_n - 6)$$

$\{a_n - 6\}$ は初項 $a_1 - 6 = -3$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列だから

$$a_n = 6 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ より $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \rightarrow 0$ であるから

► Point 2-1-8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$$

この問題で身につくこと

- ・漸化式の極限はまず一般項を狙う。求まるならこれが最短。
- ・特性方程式の α が、そのまま極限值になっている。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 2-2-7 解ける漸化式の極限

漸化式で定まる数列の極限ときたら……まず一般項 a_n が求まるかを試す！

→ 求まるなら、 a_n を求めてから極限計算するだけ。

※ 特性方程式が使える型 ($a_{n+1} = pa_n + q$) や、階差・置きかえで解ける型はここ。求まらないときが Point 2-2-8。

Point 2-1-8 無限等比数列 r^n の極限

$|r| < 1$ のとき 0 に収束 / $r = 1$ のとき 1 に収束 / $r > 1$ のとき ∞ に発散 / $r \leq -1$ のとき極限はない (振動する)。

問 4

$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

問題を見て思うこと

問 3 と同じく漸化式の極限なので、**まず一般項を狙う**。

▶ Point 2-2-7

しかし $\sqrt{\quad}$ が入っていて、特性方程式型でも階差型でも置きかえ型でもない。**一般項は求まらないのでは？**

⇒ 一般項が求まらないなら、**極限值 α を先に予想して、 $|a_n - \alpha|$ が 0 に近づくことだけを示す流れに切り替える**。

▶ Point 2-2-8

つまり「 a_n を求めてから極限」ではなく「 **α との距離が縮むことだけを言う**」。ここが発想の切り替え点。

方針の候補

× 一般項を求める … $\sqrt{\quad}$ があり、既知の型に当てはまらない。 ▶ Point 2-2-7

○ $|a_{n+1} - \alpha| \leq k|a_n - \alpha|$ ($0 < k < 1$) をつくり、はさみうちに持ち込む。 ▶ Point 2-2-8

× STEP 1 を平均値の定理でつくる … 今回は $|a_{n+1} - \alpha|$ を**有理化で直接評価**できるので不要。因数分解で作れないときの手段。 ▶ Point 2-2-8 発展

解答

(STEP 0: 極限値の予想) α に収束すると仮定すると $\alpha = \sqrt{2\alpha + 3}$ 。両辺 2 乗して $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$, $(\alpha - 3)(\alpha + 1) = 0$ 。 $\alpha \geq 0$ より $\alpha = 3$ と予想できる。

(準備: a_n の範囲) $a_1 = 1 > 0$ であり、 $a_n > 0$ ならば $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} > 0$ 。よって数学的帰納法により、すべての n で $a_n > 0$ 。

▶ 文字置いたら範囲チェック

(STEP 1: 距離が縮むことを示す) 分子を有理化して

$$|a_{n+1} - 3| = |\sqrt{2a_n + 3} - 3| = \frac{|2a_n - 6|}{\sqrt{2a_n + 3} + 3} = \frac{2|a_n - 3|}{\sqrt{2a_n + 3} + 3}$$

$a_n > 0$ より $\sqrt{2a_n + 3} + 3 > \sqrt{3} + 3 > 4$ であるから

$$|a_{n+1} - 3| < \frac{2}{4}|a_n - 3| = \frac{1}{2}|a_n - 3|$$

(STEP 2: 繰り返して、はさむ) これを繰り返し用いると

$$0 \leq |a_n - 3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - 3| = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

右辺は $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束するから、はさみうちの原理より

▶ Point 2-2-5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 3| = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

この問題で身につくこと

- ・漸化式の極限は「一般項が求まるか」で2つに分かれる。求まらなると分かった瞬間に $|a_n - \alpha|$ の流れへ切り替える。
- ・STEP 0 の $\alpha = f(\alpha)$ は予想であって証明ではない。答案では「 α に収束すると仮定すると」と断り、収束することは STEP 2 で示す。
- ・ $\sqrt{\quad}$ の差の評価は有理化。 $|a_n - \alpha|$ を因数として取り出すのが目的。
- ・ k は1未満であれば粗くてよい。今回 $\sqrt{3} + 3 = 4.73\dots$ を4で押さえたのは、 $k = \frac{1}{2}$ と扱いやすくするため。評価は必要なだけ粗く。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 2-2-8【重要】解けない漸化式の極限 有名な流れ

(STEP 0: 極限値を予想する。 α に収束すると仮定して方程式 $\alpha = f(\alpha)$ を解き簡略的に求める。または $y = x$ と $y = f(x)$ のグラフを描いて調べる。)

STEP 1: $|a_{n+1} - \alpha| \leq k |a_n - \alpha|$ (α は極限値, k は0から1の数) (発展: 平均値の定理利用)

STEP 2: $0 \leq |a_n - \alpha| \leq k^{n-1} |a_1 - \alpha| \rightarrow$ はさみうちへ。