

この見本について

高校数学の俯瞰 – 演習セット – 数学III C 第1章「関数」

これは**見本**です。実際の商品から 4 問だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … 方針の候補が多い問題や、別解を複数紹介できる問題を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の【入試対策 実戦 Point 活用演習】からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて ②目次 ③問題編 ④答え一覧 ⑤解説編 の順に入っています。
- 解説は「問題を見て思うこと」→「方針の候補 (○△×)」→「解答」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」の順です。
- 使った Point は本編の該当箇所をそのまま載せているので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 5 不等式 $\frac{2}{x-1} \geq x$ を解け。 (Point 1-1-5)

問 19 曲線 $y = \sqrt{x+2}$ と直線 $y = x+k$ の共有点の個数を、定数 k の値によって分類せよ。 (Point 1-2-4)

問 20 $f(x) = \sqrt{2x+3}$ とする。曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = f^{-1}(x)$ の共有点の座標を求めよ。 (Point 1-3-3)

【入試対策 実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 24 a を正の定数とする。 $x > 1$ における関数 $y = \frac{x^2 + a}{x-1}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 最小値を a を用いて表せ。

(2) 最小値が 6 となるような a の値を求めよ。 (Point 1-1-3)

解説編（見本）

問 5

不等式 $\frac{2}{x-1} \geq x$ を解け。

問題を見て思うこと

章のフロー：関数のテーマは 3 つ。①グラフ ②方程式・不等式 ③最大最小。▶ 関数の全体像

→ この問題は②不等式。

分数の不等式。分母をはらうときに同値性が崩れないかを必ず確認する。

▶ Point 1-1-5

→ 両辺に $x-1$ を掛けたくなるが、 $x-1$ の符号が分からないので不等号の向きが決まらない。

→ 手は 2 つ。①場合分けする。②移項して $\frac{A}{B} \geq 0$ の形に集め、 $AB \geq 0$ かつ $B \neq 0$ に直す。

→ ②のほうが場合分けが要らない。 $\frac{A}{B}$ の符号は A と B が同符号かどうかで決まる、というだけの話。

移項すると $\frac{2}{x-1} - x \geq 0$ 。→ 通分して $\frac{-x^2 + x + 2}{x-1} \geq 0$ 。

→ 分子の x^2 の係数を正にしておくとも符号が見やすい。両辺に -1 を掛けて $\frac{x^2 - x - 2}{x-1} \leq 0$ 。

方針の候補

○ 移項して $\frac{A}{B} \geq 0$ の形にし、 $AB \geq 0$ かつ $B \neq 0$ に直す。▶ Point 1-1-5

△ $x-1 > 0$ と $x-1 < 0$ で場合分けして両辺に掛ける … 通る。場合分けが 2 つ増えるが、考え方は素直。

× 両辺に $x-1$ を掛けて $2 \geq x(x-1)$ とする … $x-1 < 0$ のときは不等号の向きが変わる。符号が分からないものを掛けたまま向きを固定することはできない。

解答

移項して通分すると

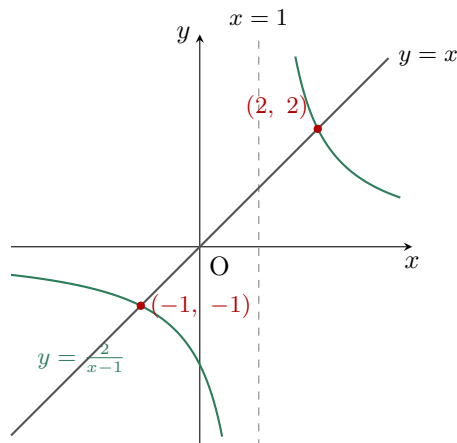
$$\frac{2}{x-1} - x \geq 0 \iff \frac{2 - x(x-1)}{x-1} \geq 0 \iff \frac{-x^2 + x + 2}{x-1} \geq 0$$

両辺に -1 を掛けて

$$\frac{x^2 - x - 2}{x-1} \leq 0 \iff \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} \leq 0$$

これは $(x-2)(x+1)(x-1) \leq 0$ かつ $x \neq 1$ と同値である。 -1 、 1 、 2 の前後で符号を調べると

$$x \leq -1, \quad 1 < x \leq 2$$



曲線が直線より上にある（または重なる） x の範囲を読む。交点は $x = -1$ と $x = 2$ 。左枝では $x \leq -1$ 、右枝では $1 < x \leq 2$ で曲線が上に来る。 $x = 1$ はそもそも曲線が無いので範囲に入らない。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 場合分けで解く道

(i) $x > 1$ のとき、両辺に $x - 1 (> 0)$ を掛けて $2 \geq x(x - 1)$ 、すなわち $x^2 - x - 2 \leq 0$ より $-1 \leq x \leq 2$ 。
 $x > 1$ と合わせて $1 < x \leq 2$ 。

(ii) $x < 1$ のとき、両辺に $x - 1 (< 0)$ を掛けて向きが変わり $2 \leq x(x - 1)$ 、すなわち $x \leq -1$ または $x \geq 2$ 。 $x < 1$ と合わせて $x \leq -1$ 。

以上を合わせて $x \leq -1$ 、 $1 < x \leq 2$ 。→ 同じ答えに到達する。

△ グラフの上下で読む道

$y = \frac{2}{x-1}$ と $y = x$ をかき、曲線が直線以上になる範囲を読む（上図）。交点は $\frac{2}{x-1} = x$ から $x = -1, 2$ 。
 → 同じ答えに到達する。答えが 2 つの区間に分かれる理由が図で見えるのがこの道の取り柄。

この問題で身につくこと

- ・分母をはらう操作は同値性が崩れやすい。符号の分からないものを掛けるときは向きが決まらない。
- ・ $\frac{A}{B} > 0 \iff AB > 0$ 、 $\frac{A}{B} \geq 0 \iff AB \geq 0$ かつ $B \neq 0$ 。等号が入るときだけ $B \neq 0$ が要る。
- ・理屈は「 A と B が同符号かどうか」だけ。 B^2 を掛けると説明されることもあるが、同符号かどうかを見れば済む。
- ・答えに $x = 1$ が入っていないかを最後に確かめる。分母を 0 にする値は初めから範囲外。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 1-1-5 同値性の崩れ ～分母をはらう～

分母をはらうときは同値性が崩れないか、逆が成り立つか注意しよう。（以下の文字はすべて実数）

- ① $\frac{y-2}{x-1} = 0 \iff y - 2 = 0$ かつ $x \neq 1$
- ② $\frac{2}{x-1} = x \iff 2 = x(x-1)$
- ③ $\frac{A}{B} > 0 \iff AB > 0$ ($<$ の場合も同様)

$$\textcircled{4} \quad \frac{A}{B} \geq 0 \iff AB \geq 0 \text{ かつ } B \neq 0 \text{ (} \leq \text{ の場合も同様)}$$

※②において、式変形後の式に $x \neq 1$ は必要ない。1 を入れても成り立たないからである。また、③や④は B^2 を両辺に掛けると説明されることがあるが、単に A と B が同符号なのか異符号なのかを考えれば済む話である。

問 19

曲線 $y = \sqrt{x+2}$ と直線 $y = x + k$ の共有点の個数を、定数 k の値によって分類せよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：関数のテーマは 3 つ。①グラフ ②方程式・不等式 ③最大最小。 ▶ 関数の全体像

→ この問題は②方程式（共有点の個数）。

共有点の個数。→ そのまま 2 乗すると、2 乗で増えた解が混ざる。

▶ Point 1-2-5

→ そこで $t = \sqrt{x+2}$ と置換する。→ $t \geq 0$ という条件が明示的に残る。

→ $x = t^2 - 2$ だから、 $t = t^2 - 2 + k$ 、すなわち $t^2 - t + k - 2 = 0$ 。

→ 求めるのは $t \geq 0$ の範囲にある解の個数。→ 2 次方程式の解の配置の問題になる。

$h(t) = t^2 - t + k - 2$ とおく。軸は $t = \frac{1}{2}$ で固定、 k が動くとして上下する。

→ 判別式 $D = 9 - 4k$ と $h(0) = k - 2$ の 2 つを見れば分類できる。

方針の候補

○ $t = \sqrt{x+2} (\geq 0)$ と置換し、 t の 2 次方程式の解の配置に帰着させる。

▶ Point 1-2-5

△ k を分離して、 $y = \sqrt{x+2} - x$ と $y = k$ の共有点を数える … 通る。ただし $\sqrt{x+2} - x$ のグラフを描くのに数Ⅲの微分が要る。

× 2 乗して $x + 2 = (x + k)^2$ とし、この 2 次方程式の実数解の個数をそのまま答える … 2 乗で $x + k < 0$ の解が入り込む。個数が合わない。

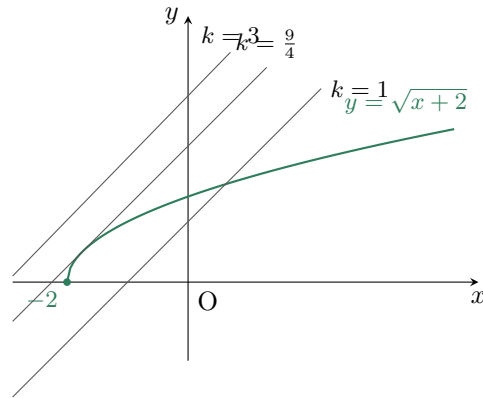
解答

$t = \sqrt{x+2}$ とおくと $t \geq 0$ であり、 $x = t^2 - 2$ である。 x と t は 1 対 1 に対応するから、共有点の個数は $t \geq 0$ を満たす t の個数に等しい。

$\sqrt{x+2} = x + k$ に代入して

$$t = t^2 - 2 + k \iff t^2 - t + k - 2 = 0$$

$h(t) = t^2 - t + k - 2$ とおくと、軸は $t = \frac{1}{2} > 0$ 、判別式は $D = 1 - 4(k - 2) = 9 - 4k$ 、 $h(0) = k - 2$ である。



曲線は固定して、傾き 1 の直線を上下に平行移動する。下から上げていくと、まず 1 点で交わり、端点 $(-2, 0)$ を通る $k = 2$ から 2 点になり、 $k = \frac{9}{4}$ で接して 1 点に戻り、それより上では交わらない。端点を通る瞬間と接する瞬間の 2 か所が境目である。

- (i) $h(0) < 0$ 、すなわち $k < 2$ のとき $\cdots t \geq 0$ の解は 1 個。
- (ii) $h(0) \geq 0$ かつ $D > 0$ 、すなわち $2 \leq k < \frac{9}{4}$ のとき $\cdots$ 2 個。
- (iii) $D = 0$ 、すなわち $k = \frac{9}{4}$ のとき $\cdots$ 重解 $t = \frac{1}{2} \geq 0$ で 1 個。
- (iv) $D < 0$ 、すなわち $k > \frac{9}{4}$ のとき $\cdots$ 0 個。

まとめると

$$\begin{cases} k < 2 & \cdots 1 \text{ 個} \\ 2 \leq k < \frac{9}{4} & \cdots 2 \text{ 個} \\ k = \frac{9}{4} & \cdots 1 \text{ 個} \\ k > \frac{9}{4} & \cdots 0 \text{ 個} \end{cases}$$

この問題で身につくこと

- ・無理関数と直線の共有点は置換して 2 次方程式の解の配置に持ち込む。
- ・置換の利点は $t \geq 0$ が式の上に残ること。2 乗だけで進むとこの条件が消えて個数がずれる。
- ・解の配置は軸・判別式・端点の値の 3 点セット。ここでは軸が固定なので、 D と $h(0)$ だけで足りる。
- ・ $k = 2$ は $h(0) = 0$ 、つまり $t = 0$ ($x = -2$ 、曲線の端点) を通る場合。境界がどの点に対応するかを図で確かめると間違えにくい。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 1-2-5 同値性の崩れ ～2 乗とルート絡み～

(本文は問 10 参照)

Point 1-2-4 無理関数 $y = \sqrt{ax + b} + c$ のグラフと性質

(本文は問 9 参照)

問 20

$f(x) = \sqrt{2x+3}$ とする。曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = f^{-1}(x)$ の共有点の座標を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：関数のテーマは 3 つ。①グラフ ②方程式・不等式 ③最大最小。 ▶ 関数の全体像

→ この問題は②方程式（共有点）。

$y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ は $y = x$ に関して対称。

▶ Point 1-3-3

→ f は単調増加。→ このとき共有点は直線 $y = x$ 上にある。

→ 理由：もし $y = x$ 上にない共有点 (a, b) ($a \neq b$) があると、対称性からその鏡像 (b, a) も共有点になる。 f が単調増加だと、この 2 点は同じ曲線上に乗れない。

→ だから $f(x) = x$ を解けばよい。→ 逆関数を求める必要がない。

$\sqrt{2x+3} = x$ 。→ 左辺は 0 以上なので $x \geq 0$ 。→ 2 乗して $2x+3 = x^2$ 。

▶ Point 1-2-5

→ なお f が単調減少のときは、 $y = x$ 上にない共有点が現れることがある。この論法はそのままでは使えない。

方針の候補

○ f が単調増加であることを述べ、 $f(x) = x$ を解く。 ▶ Point 1-3-3

△ $f^{-1}(x) = \frac{x^2-3}{2}$ ($x \geq 0$) を求めて連立する … 通る。 $\sqrt{2x+3} = \frac{x^2-3}{2}$ を解くことになり、4 次方程式が現れる。

× 単調性を確かめずに $f(x) = x$ とする … 結果は合うが、この置きかえが使えるのは単調増加のとき。理由を書いておく。

解答

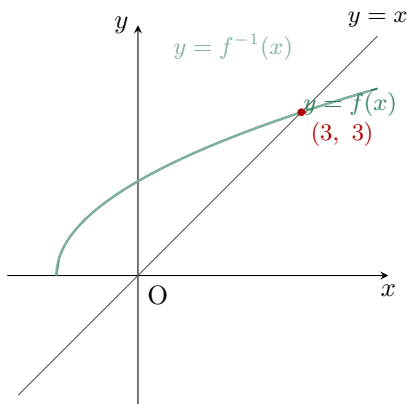
$f(x) = \sqrt{2x+3}$ は定義域 $x \geq -\frac{3}{2}$ で単調に増加する。 $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ は直線 $y = x$ に関して対称であり、 f が単調増加であるから、共有点は直線 $y = x$ 上にある。

よって $f(x) = x$ を解けばよい。左辺は 0 以上であるから $x \geq 0$ が必要で、両辺を 2 乗すると

$$2x+3 = x^2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x-3)(x+1) = 0 \iff x = 3, -1$$

$x \geq 0$ より $x = 3$ 。したがって共有点の座標は

(3, 3)



2 つの曲線は $y = x$ を折り目にした鏡像。 f が単調増加のとき、鏡像との交点は折り目の上にしか現れない。だから $f(x) = x$ を解けば足りる。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 逆関数を求めて連立する道

$y = \sqrt{2x+3}$ を x について解くと $x = \frac{y^2-3}{2}$ 。入れ換えて $f^{-1}(x) = \frac{x^2-3}{2}$ ($x \geq 0$)。これと $f(x)$ を連立して $\sqrt{2x+3} = \frac{x^2-3}{2}$ 。2 乗すると x の 4 次方程式になるが、 $x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = (x-3)(x+1)^3$ と因数分解でき、 $x \geq 0$ より $x = 3$ 。→ 同じ答えに着く。ただし 4 次式の因数分解を通る分だけ手数が多い。

△ 単調減少のときはどうなるか（反例）

$f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) は単調減少で、 $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ と自分自身に一致する。このとき共有点は曲線全体で、 $(2, \frac{1}{2})$ のように $y = x$ 上にない点も含む。→ 「共有点は $y = x$ 上」は単調増加のときの話。

この問題で身につくこと

- ・ $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ は $y = x$ 対称。ここがすべての出発点。
- ・ f が単調増加なら、共有点は $y = x$ 上。だから $f(x) = x$ を解けばよい。
- ・ 単調減少のときはこの論法が使えない。 $y = x$ 上にない共有点が現れることがある。
- ・ 2 乗したら $x \geq 0$ で絞るのを忘れない（問 10）。 $x = -1$ はここで落ちる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 1-3-3 逆関数の性質

（本文は問 13 参照）

Point 1-2-5 同値性の崩れ ～2 乗とルート絡み～

（本文は問 10 参照）

問 24

a を正の定数とする。 $x > 1$ における関数 $y = \frac{x^2 + a}{x - 1}$ について、
(1) 最小値を a を用いて表せ。 (2) 最小値が 6 となるような a の値を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：関数のテーマは 3 つ。①グラフ ②方程式・不等式 ③最大最小。▶ 関数の全体像

→ この問題は③最大最小。ただし文字定数 a が入っているので、答えも a の式になる。

分子が 2 次、分母が 1 次。→ このままでは扱えないので、1 つの分数にまとめ直す。

▶ Point 1-1-3

→ どうまとめるか。→ 分母の $x - 1$ を主役にする。 $x - 1 = t$ とおけば $t > 0$ で、 $x = t + 1$ を代入すれば t だけの式になりそう。

→ 実際に代入すると $\frac{(t+1)^2 + a}{t} = t + 2 + \frac{a+1}{t}$ 。→ t と $\frac{a+1}{t}$ の和が現れた。

→ 積は $t \cdot \frac{a+1}{t} = a+1$ で一定。→ しかも $a > 0$ より $a+1 > 0$ 、 $t > 0$ 。→ 相加平均と相乗平均の関係がそのまま使える形。

→ 等号成立は $t = \frac{a+1}{t}$ 、すなわち $t = \sqrt{a+1}$ 。→ $t > 0$ の範囲に入っているなので、実際にその値をとる。等号が成立するかどうかの確認が答案の要。

(2) → (1) の答えを 6 とおいて解くだけ。→ 根号を含む方程式になるが、 $\sqrt{a+1}$ をかたまりと見れば 1 次。

→ 出た a が $a > 0$ を満たすかを確認する。ここまで書いて答案になる。

方針の候補

- $x - 1 = t (> 0)$ において $t + 2 + \frac{a+1}{t}$ に直し、相加相乗で最小値を出す。▶ Point 1-1-3
- $x^2 + a$ を $x - 1$ で割って $y = x + 1 + \frac{a+1}{x-1} = (x-1) + \frac{a+1}{x-1} + 2$ とする。置きかえなしで同じ形に着く。
- △ $y = k$ において $x^2 - kx + (a+k) = 0$ が $x > 1$ に実数解をもつ条件から k の範囲を出す (逆像法) ... 通る。判別式 $k^2 - 4(a+k) \geq 0$ に加えて、 $g(1) = 1 - k + a + k = a + 1 > 0$ と軸 $\frac{k}{2} > 1$ を確かめる必要がある。 $g(1)$ が k によらず正になるのがこの問題の面白いところ。
- × 分子と分母をそれぞれ評価して比を作る ... 分子は $x^2 + a \geq 1 + a$ 、分母は $x - 1 > 0$ だが、2 つは連動して動くので、それぞれの評価を割っても最小値にはならない。

解答

(1) $x - 1 = t$ とおくと、 $x > 1$ より $t > 0$ であり、 $x = t + 1$ である。このとき

$$y = \frac{(t+1)^2 + a}{t} = \frac{t^2 + 2t + (a+1)}{t} = t + 2 + \frac{a+1}{t}$$

$a > 0$ より $a + 1 > 0$ であり、 $t > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$t + \frac{a+1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{a+1}{t}} = 2\sqrt{a+1}$$

等号が成り立つのは $t = \frac{a+1}{t}$ 、すなわち $t^2 = a+1$ かつ $t > 0$ より $t = \sqrt{a+1}$ のときで、これは $t > 0$ の範囲にある。

したがって

$$\text{最小値 } 2\sqrt{a+1} + 2 \quad (x = 1 + \sqrt{a+1} \text{ のとき})$$

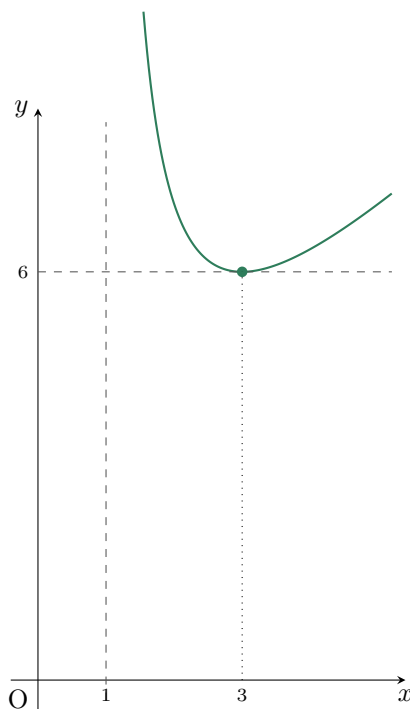
(2) (1) より

$$2\sqrt{a+1} + 2 = 6 \iff \sqrt{a+1} = 2 \iff a+1 = 4$$

よって $a = 3$ で、これは $a > 0$ を満たす。

$$a = 3$$

(このとき $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ で、 $x = 1 + 2 = 3$ のとき $\frac{9+3}{2} = 6$ 。たしかに最小値 6 である。)



$a = 3$ のとき、 $x \rightarrow 1+0$ でも $x \rightarrow \infty$ でも値は大きくなり、途中の $x = 1 + \sqrt{a+1} = 3$ で谷底になる。相加相乗の等号成立が、この谷底に対応している。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 割り算して形を作る道

$x^2 + a$ を $x - 1$ で割ると $x^2 + a = (x - 1)(x + 1) + (a + 1)$ だから

$$y = x + 1 + \frac{a + 1}{x - 1} = (x - 1) + \frac{a + 1}{x - 1} + 2$$

→ 置きかえをしなくても同じ形に着く。**(分子の次数) $\geq$ (分母の次数)** なら、まず**割り算**という原則をそのまま実行しただけで、**積が一定**の2項が現れる。

$\triangle y = k$ において**存在条件で押す道 (逆像法)**

$y = k$ において分母をはらうと $x^2 - kx + (a + k) = 0$ 。 $g(x) = x^2 - kx + (a + k)$ とすると $g(1) = 1 - k + a + k = a + 1 > 0$ で、これは k に**よらず正**。したがって $x > 1$ に解をもつには、軸 $\frac{k}{2} > 1$ かつ判別式 $k^2 - 4(a + k) \geq 0$ が必要十分。後者を解くと $k \geq 2 + 2\sqrt{a + 1}$ (もう一方の解は $k < 2$ で軸の条件に反する)。→ 同じ最小値に着く。 $g(1) > 0$ が**自動的に成り立つ**のが、この問題が逆像法とも相性がよい理由。

この問題で身につくこと

- ・(分子の次数) $\geq$ (分母の次数) なら、まず**割り算**して $() + \frac{()}{()}$ の形にする。
- ・ $t + \frac{A}{t}$ の形が出たら**相加相乗**。積が一定であることを確かめてから使う。
- ・相加相乗は**各項が正**が前提。ここでは $t > 0$ と $a + 1 > 0$ を最初に書いておく。
- ・**等号が成り立つ t が、動ける範囲に入っているか**を必ず確認する。ここを書かないと「 $\geq$ 」までしか言えていない。
- ・文字定数入りの答えが出たら、**具体的な値を入れて検算**する。 $a = 3$ で $x = 3, y = 6$ を確かめれば十分。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 1-1-3 分数関数 $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ のグラフ

(本文は問3参照)