

この見本について

高校数学の俯瞰 - 演習セット - 数学Ⅱ BC 第 9 章「ベクトル」

これは**見本**です。実際の商品から 4 問だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … 方針の候補が多い問題や、別解を複数紹介できる問題を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の【入試対策 実戦 Point 活用演習】からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて ②目次 ③問題編 ④答え一覧 ⑤解説編 の順に入っています。
- 解説は「問題を見て思うこと」→「方針の候補 (○△×)」→「解答」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」の順です。
- 使った Point は本編の該当箇所をそのまま載せているので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 1 $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ が成り立つ。これを、「ベクトル」「座標設定」の 2 つの方針それぞれで示せ。そのうえで、2 つの解法を比較せよ。 (Point 9-1-2)

問 24 $\triangle OAB$ において、辺 OA を $2:1$ に内分する点を M 、辺 OB の中点を N とする。線分 AN と線分 BM の交点を P とするとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ で表せ。 (Point 9-5-4)

問 36 $\triangle ABC$ の外心を O とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ で定まる点 P は、 $\triangle ABC$ の垂心であることを示せ。

(2) 外心が原点 O であり、 $A(3, 4)$ 、 $B(-5, 0)$ 、 $C(0, -5)$ であるとする。(1) を使って $\triangle ABC$ の垂心 H の座標を求めよ。 (Point 9-8-3)

【入試対策 実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 82 $\triangle ABC$ の重心を G とし、 $BC = a$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c$ とする。

(1) 任意の点 P に対して $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3GP^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$ が成り立つことを示せ。

(2) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$ を示し、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値を求めよ。

(3) 3 本の中線の長さの 2 乗の和は $\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ であることを示せ。 (Point 9-2-4)

解説編（見本）

問 1

$\triangle ABC$ の重心を G とするとき、 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ が成り立つ。これを、「ベクトル」「座標設定」の 2 つの方針それぞれで示せ。そのうえで、2 つの解法を比較せよ。

問題を見て思うこと

図形問題の解法は大きく 4 つ。幾何・座標設定・ベクトル・複素数平面。どれを選ぶかで書く量が大きく変わる。

► Point 9-1-2

この問題は**重心**という「平均」の性質なので、位置ベクトルで書けば一瞬で終わりそう。→ 重心の位置ベクトルは $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ 。

座標設定でも同じことができる。→ 重心の座標は x 成分・ y 成分それぞれの平均なので、成分ごとに計算するだけ。

→ ベクトルの解法の流れは、①始点を統一 ②基準ベクトルを決める ③条件を式に直す ④式を処理する。この問題では①だけで話が済む。

► Point 9-1-3

方針の候補

○ 位置ベクトルで書き、始点を G に統一する。 ► Point 9-1-3

○ 座標を設定して、成分ごとに計算する。 ► Point 9-1-2

△ 幾何で示す … 通る。中線を $2:1$ に内分することを使い、3 本のベクトルを図でつなぐことになる。手順が一定でないぶん、書きにくい。

解答

[ベクトルで示す] 適当な点 O を始点とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。重心 G の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

であるから、始点を G に変更して

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (\vec{a} - \overrightarrow{OG}) + (\vec{b} - \overrightarrow{OG}) + (\vec{c} - \overrightarrow{OG}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$$

[座標設定で示す] $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ とすると、重心は

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

である。 x 成分について

$$(x_1 - x_G) + (x_2 - x_G) + (x_3 - x_G) = (x_1 + x_2 + x_3) - 3x_G = 0$$

y 成分も同様である。よって $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ 。

[2つの解法の比較] どちらも「重心は平均である」という同じ事実を使っており、計算の中身は同じである。ちがいは書き方で、ベクトルでは1本の式で済むところを、座標設定では x 成分・ y 成分の2回に分けて書くことになる。そのかわり座標設定は、空間に移しても文字が1つ増えるだけで、同じ議論がそのまま通る。差は「どちらが優れているか」ではなく、1本にまとめて書くか、成分ごとに書き下すかにある。

この問題で身につくこと

- ・図形問題の解法は幾何・座標設定・ベクトル・複素数平面の4つ。どれか1つに決め打ちしない。
- ・どれか1つしか正解でない、ということはない。この問題のように、複数の方針が同じ計算に行き着くことも多い。
- ・ベクトルの流れは①始点統一 ②基準ベクトル ③条件を式に ④処理。迷ったらこの順に戻る。
- ・ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ は重心の言い換え。逆に、この式を見たら G は重心だと分かる。以後よく使う。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 9-1-2 4つの解法の特徴と使い分け

- ① 幾何 … 多少発想や経験値が必要。手順が一定でない代わりに、ハマれば計算量が一気に減る。場合分けの漏れにも注意が必要。
- ② 座標設定 … 座標を自分で設定することで、図形の方程式など代数に持っていく解法。計算量は多くなりがちだが、図に頼らず計算だけで押し切れるのが強み。直角の多い図形で有力。
- ③ ベクトル … 特に空間図形などでは標準的な手段。四面体・平行六面体などと相性がよい。あらゆる条件をベクトルの式に書き換えられるようになると強みになる。
- ④ 複素数平面 … 主に回転がからむ問題で威力を発揮する。(履修者のみ)

Point 9-1-3 ベクトルの解法の流れ

- ① まずは始点を統一する
- ② 平面なら2本、空間なら3本の基準ベクトルを決める
- ③ 問題文の条件を、すべてベクトルの式に直す
- ④ ベクトルの式を処理する

Point 9-8-1 重心の座標

$$\triangle ABC: \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\text{四面体 } ABCD: \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

問 24

△OAB において、辺 OA を 2 : 1 に内分する点を M、辺 OB の中点を N とする。線分 AN と線分 BM の交点を P とするとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ で表せ。

問題を見て思うこと

章のフロー：ベクトルを選んだら①始点を統一 → ②基準ベクトルを決める → ③条件をすべてベクトルの式に直す → ④式を処理する。

► Point 9-1-3

→ この問題は③（2本の条件を式に）→ ④係数比較。

交点は 2 通りで表せ。これがこの型の合言葉。

► Point 9-5-4

→ ① P は線分 AN 上： $\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + s\overrightarrow{ON}$ ② P は線分 BM 上： $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OM} + (1-t)\vec{b}$

→ 2 通りに表したら、 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ が 1 次独立であることを述べて係数比較。

► Point 9-5-3

$\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\vec{b}$ 。→ 連立を解けば s 、 t が決まる。

→ どちらの式に代入しても同じ答えになるはず。両方で確かめれば検算になる。

方針の候補

○ 2 通りに表して、1 次独立を確認してから係数比較。 ► Point 9-5-4

△ 座標を設定して直線の交点として求める … 通る。O(0,0)、A(3,0)、B(0,2) などとおけば、2 直線の交点を求めるだけになる。ただし一般の三角形で成り立つことを言うには、答えを $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ に戻す必要がある。

× 1 次独立に触れずに係数比較する … 比較の根拠が抜ける（問 23）。

解答

$\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\vec{b}$ である。

P は線分 AN 上にあるから、実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + s \cdot \frac{1}{2}\vec{b} = (1-s)\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} \quad \dots ①$$

P は線分 BM 上にあるから、実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OP} = t \cdot \frac{2}{3}\vec{a} + (1-t)\vec{b} = \frac{2t}{3}\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \dots ②$$

$\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ は 1 次独立であるから、①と②の係数を比較して

$$1-s = \frac{2t}{3}, \quad \frac{s}{2} = 1-t$$

第 2 式より $s = 2-2t$ 。第 1 式に代入して

$$1 - (2-2t) = \frac{2t}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 2t-1 = \frac{2t}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4}{3}t = 1$$

よって $t = \frac{3}{4}$ 、 $s = \frac{1}{2}$ 。①に代入して

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

(②に代入しても $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ となり一致する。)

この問題で身につくこと

- ・交点は 2 通りで表せ。それから 1 次独立を確認して係数比較。
- ・線分上の点は係数の和が 1 (共線条件)。 $(1-s)\vec{a} + s\vec{c}$ の形に書く。
- ・2 つの式の両方に代入して確かめるのが最も確実な検算。
- ・「2 通りに表して比べる」という発想は、垂線の足 (問 16) とも共通している。未知数を減らしてから条件を当てるのが型。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 9-5-4【重要】 交点ときたら・・・

交点は 2 通りで表せ！ → 1 次独立を確認して係数比較！

Point 9-5-3 一意性について

(本文は問 23 参照)

Point 9-6-2 2 点通る直線のベクトル方程式 共線条件

$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ (t は実数) これが最初の式！

$$\therefore \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \text{ かつ } s+t=1$$

問 36

$\triangle ABC$ の外心を O とする。(1) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ で定まる点 P は $\triangle ABC$ の垂心であることを示せ。(2) 外心が原点 O で $A(3, 4)$ 、 $B(-5, 0)$ 、 $C(0, -5)$ のとき、(1) を使って垂心 H の座標を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：ベクトルを選んだら①始点を統一 → ②基準ベクトルを決める → ③条件をすべてベクトルの式に直す → ④式を処理する。

▶ Point 9-1-3

→ この問題は③（垂直を内積で式に）。

この公式は教科書には載っていない。だから (1) で自分の手で作ってから (2) で使う、という順に並べてある。

(1) 示したいのは「 P が垂心」、つまり P が 3 本の垂線の上にあること。→ 垂線の上にある、は内積 $= 0$ で書ける。

▶ Point 9-3-5

→ A から下ろした垂線なら $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$ 、つまり $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ を示せばよい。

→ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 。 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ 。

→ この 2 つは和と差の形になっている。→ 内積をとると $|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2$ 。

→ ここで O が外心であること、すなわち $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ が効いて 0 になる。外心を始点にとる理由がここにある。

→ 2 本の垂線の上であれば、3 本目の上にもある（垂心は 2 本の交点として決まる）。

(2) 外心が原点と与えられているので、(1) の式にそのまま座標を足すだけ。

→ 使う前に $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ を確かめておきたい。 $\sqrt{9+16} = 5$ 、5、5 で確かに外心。

方針の候補

○ (1) は $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ と $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ を示す。▶ Point 9-3-5 (2) は (1) の式に代入する。

▶ Point 9-8-3

△ (2) を 2 本の垂線の交点として求める … 通る。 A から BC への垂線と、 B から CA への垂線を連立すればよい。式は増えるが、(1) を使わなくても解ける。

× 外心でない点を始点にしてこの式を使う … (1) の証明で $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ を使っている。始点が外心のときだけ成り立つ。

解答

(1) O は外心であるから

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$$

である。 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ より

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

であるから

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

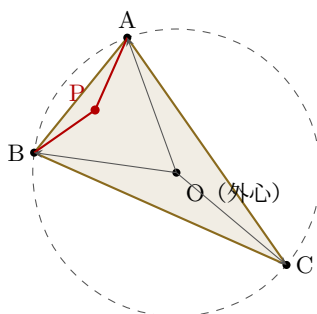
よって $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$ 、すなわち P は A から BC に下ろした垂線上にある。 $(\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ となる場合も、 $P = A$ がその垂線上にあることに変わりはない。)

同様に

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

であるから $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2 = 0$ となり、P は B から CA に下ろした垂線上にもある。

垂心は 2 本の垂線の交点であるから、P は $\triangle ABC$ の垂心である。



3 頂点を通る円の中心が O。 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ で決まる点 P から A、B に引いた線が、それぞれ向かいの辺と直交している。

(2) $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 、 $|\overrightarrow{OB}| = 5$ 、 $|\overrightarrow{OC}| = 5$ であり、確かに O は外心である。よって (1) より

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (3, 4) + (-5, 0) + (0, -5) = (-2, -1)$$

したがって $H(-2, -1)$

別の方針でも解いてみる (略解)

△ (2) を 2 本の垂線の交点として求める道 ((1) を使わない)

$H(x, y)$ とおく。 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ より $(x - 3, y - 4) \cdot (5, -5) = 0$ 、すなわち $x - y = -1$ 。 $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ より $(x + 5, y) \cdot (3, 9) = 0$ 、すなわち $x + 3y = -5$ 。連立して $x = -2, y = -1$ 。→ 同じ答えに到達する。公式を知らなくても解けるが、連立が 1 本増える。

この問題で身につくこと

- ・ $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (O は外心)。教科書には載っていないので、使う前に一度は自分で示しておく。
- ・ 証明の要は和と差の積。 $(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2$ となり、外心だから 0。
- ・ 始点が外心のときだけ成り立つ。使う前に 3 頂点からの距離が等しいことを確かめる。
- ・ 答案では、この公式を使うなら一言証明を添えるか、垂線の交点として求める道 (略解) に切りかえる。
- ・ この式からオイラー線 (問 39) も出る。外心・重心・垂心が一直線上に並ぶ。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 9-8-3 垂心の位置ベクトル

△ABC の垂心を H、外心を O とすると

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

とかける！

Point 9-8-2 外心の立式

(本文は問 35 参照)

Point 9-3-5 ベクトルの垂直条件

(本文は問 11 参照)

問 82

$\triangle ABC$ の重心を G とし、 $BC = a$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c$ とする。

- (1) 任意の点 P に対して $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3GP^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$ が成り立つことを示せ。 (2) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$ を示し、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値を求めよ。
(3) 3 本の中線の長さの 2 乗の和は $\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ であることを示せ。

問題を見て思うこと

章のフロー：図形問題の入口は 4 つ。①幾何 ②座標設定 ③ベクトル ④複素数平面。

► Point 9-1-2

→「長さの 2 乗の和」が主役。2 乗と和はベクトルの得意分野なので③を選ぶ。座標設定②でも通るが、一般の三角形なので文字が 6 個になる。

ベクトルなら①始点を統一から。→動く点は P なので、 P を始点にすると P が消えてしまう。

→逆に、固定された点を始点にして P の位置ベクトルを変数にする。

► Point 9-2-2

→始点をどこに置くか。A でもよいが、答えが重心だと予想がつかなら、はじめから重心 G を始点にしておくとしがきれいになりそう。

→重心を始点にする利点は $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ が使えること。

► Point 9-8-1

→ $AP^2 = |\vec{AP}|^2 = |\vec{GP} - \vec{GA}|^2$ 。大きさは 2 乗せよなので、そのまま展開する。

► Point 9-2-4

→3 つ足すと、 $\vec{GP}$ との内積の項が $-2\vec{GP} \cdot (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = \vec{0}$ でまるごと消える。→残るのは $3|\vec{GP}|^2 + (\text{定数})$ という形。→最小は $P = G$ のとき。

→最小値は $|\vec{GA}|^2 + |\vec{GB}|^2 + |\vec{GC}|^2$ 。これを a, b, c で書くには、 $\vec{GA}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ に戻して展開すればよい。

(3) →中線と重心の関係。→重心は中線を 2 : 1 に内分する。→ $GA = \frac{2}{3} \times (A \text{ から引いた中線の長さ})$ 。

→ということは、中線の長さは $\frac{3}{2}GA$ 。→2 乗すると $\frac{9}{4}GA^2$ 。

→3 本足すと $\frac{9}{4}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ 。→(2) がそのまま使える。

→ $\frac{9}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ 。→目標の式になった。

→検算。→1 辺 1 の正三角形なら中線は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ で、3 本の 2 乗の和は $3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ 。→公式は $\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$ 。→一致する。

方針の候補

○ 重心 G を始点にとり、 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ で 1 次の項を消す。 ► Point 9-8-1

○ A を始点にとって $\vec{AP} = \vec{p}$ とおき、 $|\vec{p}|^2$ の 2 次式として平方完成する。 ► Point 9-2-4

△ 座標を $A(0, 0)$ 、 $B(c, 0)$ 、 $C(p, q)$ と設定して計算する … 通る。 x, y それぞれで平方完成すればよいので難しくはないが、最後に a, b で書き直すために p, q を a, b, c に戻す作業が残る。

► Point 9-1-2

× P を始点にして $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ を考える … 和のベクトルは $3\overrightarrow{PG}$ になるが、求めたいのは 2 乗の和であって、和の 2 乗ではない。 $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2$ と $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|^2$ は別物なので、この形のままで結び付かない。

■ 解答

(1) G を始点にとる。重心の性質より

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

である。 $\overrightarrow{GP} = \vec{p}$ とおくと $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \overrightarrow{GA}$ などとなるから

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = |\vec{p} - \overrightarrow{GA}|^2 + |\vec{p} - \overrightarrow{GB}|^2 + |\vec{p} - \overrightarrow{GC}|^2$$

それぞれを展開して足すと

$$= 3|\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2)$$

第 2 項は $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ より 0 である。よって

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3|\overrightarrow{GP}|^2 + (|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2)$$

すなわち

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3GP^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

が成り立つ。

(2) $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおくと $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$ であるから

$$\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}), \quad \overrightarrow{GB} = \vec{b} - \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{2\vec{b} - \vec{c}}{3}, \quad \overrightarrow{GC} = \frac{2\vec{c} - \vec{b}}{3}$$

よって

$$|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 = \frac{1}{9} \{ |\vec{b} + \vec{c}|^2 + |2\vec{b} - \vec{c}|^2 + |2\vec{c} - \vec{b}|^2 \}$$

中かっこの中を展開すると

$$(|\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2) + (4|\vec{b}|^2 - 4\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2) + (4|\vec{c}|^2 - 4\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2) = 6|\vec{b}|^2 + 6|\vec{c}|^2 - 6\vec{b} \cdot \vec{c}$$

ここで $|\vec{b}| = c$ 、 $|\vec{c}| = b$ 、 $a^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2$ より $2\vec{b} \cdot \vec{c} = b^2 + c^2 - a^2$ であるから

$$6c^2 + 6b^2 - 3(b^2 + c^2 - a^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

したがって

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{9} \cdot 3(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

(正三角形で 1 辺 1 のとき、この値は 1。重心から各頂点までの距離が $\frac{1}{\sqrt{3}}$ なので $3 \times \frac{1}{3} = 1$ で一致する。)

(1) の右辺の第 2 項は P によらない定数だから、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ は $GP = 0$ 、すなわち P が重心 G に一致するとき最小となり、最小値は

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

(3) 頂点 A, B, C から引いた中線の長さをそれぞれ m_a, m_b, m_c とする。重心は中線を頂点の側から 2 : 1 に内分するから

$$GA = \frac{2}{3}m_a, \quad GB = \frac{2}{3}m_b, \quad GC = \frac{2}{3}m_c$$

すなわち $m_a = \frac{3}{2}GA$ などであるから

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{9}{4}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

(2) より

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(1 辺 1 の正三角形では中線が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ で、2 乗の和は $3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ 。公式の値 $\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$ と一致する。)

別の方針でも解いてみる (略解)

△ A を始点にして平方完成する道

$\vec{AP} = \vec{p}$ 、 $\vec{b} = \vec{AB}$ 、 $\vec{c} = \vec{AC}$ とおくと

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3|\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 3 \left| \vec{p} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} \right|^2 + \dots$$

→ 同じ結論に到達する。平方完成の結果に出てくる $\frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$ が重心で、「重心が答え」を知らなくても計算の途中から出てくるのが利点。

△ 座標を設定して解く道

A(0, 0)、B(x_1, y_1)、C(x_2, y_2)、P(x, y) とおくと、和は x と y それぞれについての 2 次式になり、平方完成すれば $x = \frac{x_1 + x_2}{3}$ 、 $y = \frac{y_1 + y_2}{3}$ で最小。これは重心の座標そのもの。→ 同じ結論に到達する。1 変数ずつ独立に処理できるのが利点。 ▶ Point 9-1-2

この問題で身につくこと

- ・長さの 2 乗が主役ならベクトル。| · |² は内積に直せば普通の展開になる。
- ・どこを始点にするかで手数が変わる。答えの予想がつくならその点を始点にすると、 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ が効いて 1 次の項が消える。
- ・予想がつかなくても、A 始点で平方完成すれば重心が出てくる。答えを知らなくても届く道を用意しておきたい。
- ・2 乗の和と、和の 2 乗は別物。 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 3\vec{PG}$ はきれいだが、この問題には直接効かない。
- ・出た答えは正三角形で検算する。文字式のままの答えは、特別な場合を入れて確かめる習慣をつけたい。
- ・重心は中線を 2 : 1 に内分。中線の長さは GA の $\frac{3}{2}$ 倍。この 1 本で (2) の結果が中線の話に化ける。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 9-2-4 ベクトルの大きさは〇〇せよ！

(本文は問 4 参照)

Point 9-8-1 重心の座標

(本文は問 1 参照)

Point 9-2-2 まずは〇〇を統一せよ！

(本文は問 3 参照)

Point 9-1-2 4 つの解法の特徴と使い分け

(本文は問 1 参照)