この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学II BC 第 8 章「確率分布と統計的な推測」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 11　次の確率変数の期待値・分散・標準偏差を求めよ。

(1) X が $B\left(100,\ \dfrac{1}{5}\right)$ に従うとき　　(2) X が $B\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うとき

(3) さいころを 180 回投げたときに 1 の目が出る回数　　（Point 8-3-4）

問 17　X が二項分布 $B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うとき、次を求めよ。

(1) $P(X \geqq 220)$　　(2) $P(180 \leqq X \leqq 210)$

(3) ここで正規分布を使ってよい理由を述べよ。　　（Point 8-4-1）

問 26　母標準偏差が 10 である母集団から大きさ 100 の標本を無作為に抽出したところ、標本平均は 52 であった。

(1) 母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

(2) 信頼度 99% の信頼区間を求めよ。　　（Point 8-7-1）

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 31　さいころを 720 回投げ、1 の目が出る回数を X とする。

(1) X の従う分布を答え、$E(X)$，$\sigma(X)$ を求めよ。

(2) X が近似的に従う正規分布を答えよ。

(3) $P(X \geqq 140)$ と $P(100 \leqq X \leqq 130)$ を求めよ。　　（Point 8-4-3）

解説編（見本）

問 11

次の確率変数の期待値・分散・標準偏差を求めよ。
(1) X が $B\left(100,\ \dfrac{1}{5}\right)$ に従うとき　(2) X が $B\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うとき
(3) さいころを 180 回投げたときに 1 の目が出る回数

問題を見て思うこと

章のフロー：**①つかむ** → ②標準化 → ③表。ここで①が完成する。　▶Point 8-3-4
→ 二項分布の 3 点セットは $E(X)=np$、$V(X)=npq$、$\sigma(X)=\sqrt{npq}$。E は「毎回の確率を n 回ぶん」、V は 1 回の分散 pq を独立な n 個ぶん足したもの。　▶Point 8-2-5
→ 1 回の分散：値 1（確率 p）、0（確率 q）より $E=p$、$E\left(X^2\right)=p$。→ $V=p-p^2=pq$。
→ (1) $n=100$、$p=\dfrac{1}{5}$ で $E=20$、$V=16$、$\sigma=4$。→ (2) $n=720$、$p=\dfrac{1}{6}$ で $E=120$、$V=100$、$\sigma=10$。この設定は問 31・問 35 で再登場する。
→ (3) 反復試行なので $B\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$ と見抜く。$E=30$、$V=25$、$\sigma=5$。σ は E よりかなり小さいのがふつうで、1 の目は 30 ± 5 くらいに収まりやすい。次の正規分布へつながる。

解答

X が $B(n,\ p)$ に従うとき、$q=1-p$ として

$$E(X)=np,\qquad V(X)=npq,\qquad \sigma(X)=\sqrt{npq}$$

(1)　$n=100,\ p=\dfrac{1}{5},\ q=\dfrac{4}{5}$ より

$$E(X)=\mathbf{20},\qquad V(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\mathbf{16},\qquad \sigma(X)=\mathbf{4}$$

(2)　$n=720,\ p=\dfrac{1}{6},\ q=\dfrac{5}{6}$ より

$$E(X)=\mathbf{120},\qquad V(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\mathbf{100},\qquad \sigma(X)=\mathbf{10}$$

(3)　1 の目が出る回数は $B\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X)=\mathbf{30},\qquad V(X)=180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\mathbf{25},\qquad \sigma(X)=\mathbf{5}$$

方針の候補

○ $E(X)=np$、$V(X)=npq$、$\sigma(X)=\sqrt{npq}$。　▶Point 8-3-4
○ $E=np$ は**「毎回の確率を n 回ぶん」**と読めば覚えなくてよい。

○ $V = npq$ は 1 **回の分散** pq **を** n **個足した**もの。独立だから足せる。 ▶ **Point 8-2-5**

△ 分布表を作って定義から計算する ⋯ n が小さければうまくいく。$n = 720$ では**現実的でない**。

× $V = np$ とする ⋯ q **を掛ける**。npq。

× $\sigma = npq$ とする ⋯ $\sqrt{\ }$ が必要。

× (3) で二項分布と見抜けない ⋯ n **回の反復試行**。$B\left(180, \dfrac{1}{6}\right)$。

この問題で身につくこと

・二項分布の 3 点セットは np、npq、$\sqrt{npq}$。
・$E = np$ は**「毎回の確率を n 回ぶん」**。覚えなくてよい。
・$V = npq$ は 1 **回の分散** pq **を** n **個**。独立だから足せる。
・1 回の分散が pq なのは、値 1 ／ 0 の分布から $p - p^2$。
・σ は $\sqrt{\ }$ を忘れない。
・σ は E よりかなり小さいのがふつう。**検算の目**。
・ここまでで**分布を 2 数でつかむ**が完成。次は正規分布へ。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 8-3-4 二項分布の期待値・分散・標準偏差
X が $B(n,\ p)$ に従い $q = 1 - p$ とするとき

$$E(X) = np, \qquad V(X) = npq, \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

$\because$ 1 回の試行で 1（確率 p）、0（確率 q）をとる確率変数の期待値は p、分散は $p - p^2 = pq$。X はこれを n 個足したもので、各回は独立だから期待値も分散も n 倍になる。

問 17

X が二項分布 $B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うとき、次を求めよ。

(1) $P(X \geqq 220)$　(2) $P(180 \leqq X \leqq 210)$

(3) ここで正規分布を使ってよい理由を述べよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①つかむ → ②標準化 → ③表。3 つとも使う。　▶Point 8-4-1

→ 二項分布のまま足すと 181 項。→ **正規分布で近似**する。

→ ① $E(X) = np = 200,\ V(X) = npq = 100,\ \sigma = 10$。→ X は近似的に $N\left(200,\ 10^2\right)$。

→ ② $Z = \dfrac{X - 200}{10}$。(1) $X = 220$ は $z = 2$。→ ③ $0.5 - u(2) = 0.0228$（約 2.3%）。

→ (2) $X = 180,\ 210$ は $z = -2,\ 1$。0 をまたぐので**足す**。→ $u(2) + u(1) = 0.8185$。

→ (3) n が大きいと、二項分布は正規分布に近づく。目安は np **も** nq **も十分大きい**こと（ここでは 200 と 200）。

解答

$n = 400,\ p = \dfrac{1}{2},\ q = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$E(X) = np = 200, \qquad V(X) = npq = 100, \qquad \sigma(X) = 10$$

n が十分大きいので、X は近似的に正規分布 $N\left(200,\ 10^2\right)$ に従う。よって $Z = \dfrac{X - 200}{10}$ とおくと Z は近似的に $N(0,\ 1)$ に従う。

(1)　$X = 220$ は $z = 2$ にあたるから

$$P(X \geqq 220) \fallingdotseq P(Z \geqq 2) = 0.5 - u(2) = 0.5 - 0.4772 = \mathbf{0.0228}$$

(2)　$X = 180,\ 210$ はそれぞれ $z = -2,\ 1$ にあたるから

$$P(180 \leqq X \leqq 210) \fallingdotseq P(-2 \leqq Z \leqq 1) = u(2) + u(1) = 0.4772 + 0.3413 = \mathbf{0.8185}$$

(3)　二項分布 $B(n,\ p)$ は、n **が十分大きいとき正規分布** $N(np,\ npq)$ **に近づく**ことが知られている。実際、n を大きくすると二項分布の棒グラフはなめらかな山型に近づく。本問では $n = 400$ で $np = nq = 200$ とどちらも十分大きいので、正規分布による近似を使ってよい。

方針の候補

○ n **が大きい二項分布は** $N(np,\ npq)$ **で近似**できる。▶Point 8-4-1

○ まず $E = np$、$\sigma = \sqrt{npq}$ を出してから標準化。▶Point 8-3-4

○ 目安は np **も** nq **も十分大きい**こと。

× 二項分布のまま 181 項を足そうとする ⋯ **現実的でない**。近似する。

× $\sigma = 100$ とする ⋯ $V = 100$、$\sigma = 10$。

× 近似の根拠を書かない ··· 記述では**「n が大きいので」**と一言添える。

この問題で身につくこと

・n が大きい二項分布は $N(np,\ npq)$ **で近似**できる。
・手順は $E = np$、$\sigma = \sqrt{npq}$ → **標準化** → **表**。
・目安は np **も** nq **も十分大きい**こと。
・$V = npq$ と $\sigma = \sqrt{npq}$ を**取り違えない**。
・二項分布のままでは**項が多すぎて**計算が大変になる。
・記述では**「n が大きいので」**と根拠を一言。
・この流れが**共通テストの定番**。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 8-4-1 二項分布と正規分布の関係
X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき、n が十分大きければ X は近似的に正規分布

$$N\left(np,\ npq\right) \qquad (q = 1 - p)$$

に従う。したがって $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$ とおけば、Z は近似的に $N(0,\ 1)$ に従い、正規分布表が使える。

問 26

母標準偏差が 10 である母集団から大きさ 100 の標本を無作為に抽出したところ、標本平均は 52 であった。

(1) 母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

(2) 信頼度 99% の信頼区間を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①つかむ → ②標準化 → ③表。推定はこの流れを**逆にたどる**。 ▶Point 8-7-1

→ これまでは m を知って $\overline{X}$ の確率を求めた。推定は逆で、$\overline{X}$ を知って m **の範囲を言う**。出発点は $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ が $N(0,\ 1)$ であること。 ▶Point 8-6-6

→ $P(|Z| \leqq 1.96)=0.95$ を m について解く。 ▶Point 8-5-3 → 信頼区間は $\overline{X} \pm 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$。

→ (1) $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{10}{10}=1$ より 52 ± 1.96。→ $[50.04,\ 53.96]$。

→ (2) 99% では 1.96 が 2.58 に変わる（$2u(2.58)=0.9902 \fallingdotseq 0.99$）。→ 52 ± 2.58 で $[49.42,\ 54.58]$。

→ 99% のほうが**区間が広い**。より確実に当てたければ幅を広げることになり、確実さと精密さを両方ほしければ n **を大きくする**。問 27 へ。

解答

標本平均を $\overline{X}$ とすると、n が十分大きいとき $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ は近似的に $N(0,\ 1)$ に従う。$P(|Z| \leqq 1.96)=0.95$ より

$$\left|\overline{X}-m\right| \leqq 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \therefore\ \ \overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(1)　$\overline{X}=52,\ \sigma=10,\ n=100$ より $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{10}{10}=1$ であるから

$$52-1.96 \leqq m \leqq 52+1.96 \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{50.04 \leqq m \leqq 53.96}$$

(2)　$2u(2.58)=2\times 0.4951=0.9902 \fallingdotseq 0.99$ より、信頼度 99% では 1.96 を 2.58 に置きかえて

$$52-2.58 \leqq m \leqq 52+2.58 \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{49.42 \leqq m \leqq 54.58}$$

（信頼度を上げると区間は広くなる。「より確実に当てる」ためには、幅を広げることになる。）

方針の候補

○ $\overline{X} \pm 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$（信頼度 95%）。 ▶Point 8-7-1

○ 99% なら 1.96 → 2.58。$2u(2.58) \fallingdotseq 0.99$ から。 ▶Point 8-5-3

○ 導出は $P(|Z| \leqq 1.96)=0.95$ を m **について解く**だけ。

△ $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ を先に計算してから 1.96 を掛ける ··· うまくいく。むしろ**計算がラク**。

× $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の $\sqrt{\ }$ を忘れる ··· $\dfrac{10}{100}=0.1$ としてしまう。

× 95% と 99% で同じ 1.96 を使う ··· 2.58。

× 区間を「$m\pm\cdots$」と書く ··· 中心は $\overline{X}$。m は未知。

この問題で身につくこと

・信頼区間は $\overline{X}\pm1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$（信頼度 95%）。
・信頼度 99% なら 2.58。
・導出は $P(|Z|\leqq 1.96)=0.95$ を m **について解く**だけ。
・中心は**標本平均** $\overline{X}$。m は未知。
・$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の $\sqrt{\ }$ を忘れない。
・**信頼度を上げると区間は広がる**。トレードオフ。
・両方よくしたければ n **を大きくする**。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 8-7-1 母平均の推定　～信頼区間～

母標準偏差 σ が既知で、大きさ n（十分大）の標本の標本平均が $\overline{X}$ のとき、母平均 m に対する

$$\text{信頼度 95\%:}\quad \overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{信頼度 99\%:}\quad \overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq \overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\because P(|Z|\leqq 1.96)=0.95,\ P(|Z|\leqq 2.58)\fallingdotseq 0.99$ を m について解いたもの。

問 31

さいころを 720 回投げ、1 の目が出る回数を X とする。
(1) X の従う分布を答え、$E(X)$, $\sigma(X)$ を求めよ。
(2) X が近似的に従う正規分布を答えよ。
(3) $P(X \geqq 140)$ と $P(100 \leqq X \leqq 130)$ を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①つかむ → ②標準化 → ③表。この問題がフローそのもの。 ▶Point 8-4-3
→ 共通テストの定番の形。**二項分布と見抜く** → E, σ → **正規近似** → **標準化** → **表**。誘導が (1)(2)(3) に分かれている。
→ (1) 二項分布の条件を確認する。▶Point 8-3-2 試行回数 720 回、「1 が出る／出ない」の 2 状態、毎回 $\dfrac{1}{6}$。→ $B\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$ で、$E=120$、$V=100$、$\sigma=10$。
→ (2) $n=720$ は十分大きいので、近似的に $N\left(120,\ 10^2\right)$。 ▶Point 8-4-1
→ (3) $Z=\dfrac{X-120}{10}$。$X=140$ は $z=2$ で $0.5-u(2)=0.0228$（約 2.3%）。$X=100,\ 130$ は $z=-2,\ 1$ で、0 をまたぐので $u(2)+u(1)=0.8185$。
→ 検算：120 ± 10 に約 68%、±20 に約 95% が入る。$100\sim130$ で約 82% は妥当。

解答

(1)　各回の試行は独立で、1 の目が出る確率は毎回 $\dfrac{1}{6}$ であるから

$$X \text{ は } \boldsymbol{B\left(720,\ \frac{1}{6}\right)} \text{ に従う}$$

$$E(X)=720\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{120},\qquad \sigma(X)=\sqrt{720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=\sqrt{100}=\mathbf{10}$$

(2)　$n=720$ は十分大きいので

$$X \text{ は近似的に } \boldsymbol{N\left(120,\ 10^2\right)} \text{ に従う}$$

(3)　$Z=\dfrac{X-120}{10}$ とおくと Z は近似的に $N(0,\ 1)$ に従う。
$X=140$ は $z=2$ にあたるから

$$P(X \geqq 140) \fallingdotseq P(Z \geqq 2)=0.5-u(2)=0.5-0.4772=\mathbf{0.0228}$$

$X=100,\ 130$ はそれぞれ $z=-2,\ 1$ にあたるから

$$P(100 \leqq X \leqq 130) \fallingdotseq P(-2 \leqq Z \leqq 1)=u(2)+u(1)=0.4772+0.3413=\mathbf{0.8185}$$

方針の候補

○ 流れは**二項分布と見抜く** → E, σ → **正規近似** → **標準化** → **表**。 ▶Point 8-4-3

○ $E = np$、$\sigma = \sqrt{npq}$ を先に出す。ここが土台。 ▶ **Point 8-3-4**

○ 1σ で約 68%、2σ で約 95% の感覚で**答えを検算**。 ▶ **Point 8-4-2**

△ z の値を分数のまま扱う ··· うまくいく。ただし**小数に直す**ほうが表を引きやすい。

× $\sigma = 100$ とする ··· $V = 100$、$\sigma = 10$。

× 二項分布のまま計算しようとする ··· **項が多すぎる**。近似する。

× 0 をまたぐのに引き算する ··· **左右に分けて足す**。

この問題で身につくこと

・定番の流れは**二項分布** → E，σ → **正規近似** → **標準化** → **表**。
・まず 3 **条件**を確認して二項分布と見抜く。
・$E = np$、$\sigma = \sqrt{npq}$。V と σ を取り違えない。
・n が大きければ $N(np,\ npq)$ **で近似**。
・0 をまたぐときは**左右に分けて足す**。
・1σ **で約** 68%、2σ **で約** 95% の感覚で検算。
・共通テストは**この誘導が数珠つなぎ**で出る。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 8-4-3「正規分布」ときたら ···

- まず**平均** m **と標準偏差** σ を確定させる（二項分布なら $m = np,\ \sigma = \sqrt{npq}$）
- 次に**標準化** $Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$
- 最後に**正規分布表**で確率を読む（0.5 から引く／くり抜く／折り返す）

Point 8-4-1 二項分布と正規分布の関係
n が十分大きいとき、$B(n,\ p)$ は近似的に $N(np,\ npq)$ に従う。