

この見本について

高校数学の俯瞰 - 演習セット - 数学Ⅱ BC 第 7 章「数列」

これは**見本**です。実際の商品から 4 問だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … 方針の候補が多い問題や、別解を複数紹介できる問題を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の【入試対策 実戦 Point 活用演習】からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて ②目次 ③問題編 ④答え一覧 ⑤解説編 の順に入っています。
- 解説は「問題を見て思うこと」→「方針の候補 (○△×)」→「解答」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」の順です。
- 使った Point は本編の該当箇所をそのまま載せているので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 16 次の2つの和を、「展開して $\sum$ の公式を使う」「差の形を作って中抜きする」のどちらの方針でも求めよ。そのうえで、2つの解法を比較せよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n k(k+1) \quad (2) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) \quad (\text{Point 7-2-6})$$

問 21 表を上にして置かれた硬貨が1枚ある。1個のさいころを投げ、出た目が3の倍数ならば硬貨を裏返し、そうでなければ何もしない、という操作を考える。この操作を n 回行った後に硬貨が表である確率を p_n とするとき、 p_n を求めよ。 (Point 7-2-12)

問 24 次の各漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ について、「①引く」「②割る」「③うまく振り分ける」のうち使える方針を挙げ、それぞれ等差・等比・階差のいずれの数列に帰着するかを述べよ。使えないものについては、その理由を述べよ。(一般項を最後まで求める必要はない。)

$$(1) a_{n+1} = 3a_n + 5 \quad (2) a_{n+1} = 2a_n + 3^n \\ (3) (n+1)a_{n+1} = na_n \quad (4) a_{n+1} = a_n + n^2 - 1 \quad (\text{Point 7-3-1})$$

【入試対策 実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの6問から、1問を見本として載せます。

問 67 次の問いに答えよ。

$$(1) \text{ すべての自然数 } k \text{ について } k \cdot k! = (k+1)! - k! \text{ が成り立つことを示せ。} \\ (2) (1) \text{ を用いて、 } \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1 \text{ を示せ。} \\ (3) \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \text{ を求めよ。} \quad (\text{Point 7-2-6})$$

解説編（見本）

問 16

次の2つの和を、「展開して $\sum$ の公式を使う」「差の形を作って中抜きする」のどちらの方針でも求めよ。そのうえで、2つの解法を比較せよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n k(k+1) \quad (2) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3)$$

問題を見て思うこと

どちらの方針でも求めよ、と言われている。ということは2つとも実際に通るはずだ。まずは両方やってみて、そのうえで速さを比べればよい。

展開の側の道具は $\sum$ の公式で、手持ちは k^3 まで。▶ Point 7-1-6 中抜きの側の道具は差の形 $g(k+1) - g(k)$ で、 g は自分で用意する。

▶ Point 7-2-6

(1) は展開すると $k^2 + k$ 。公式の範囲内なので、そのまま足せば終わる。中抜きなら $g(k) = \frac{1}{3}(k-1)k(k+1)$ でよさそう。

(2) は展開すると最高次が k^4 。 $\sum k^4$ の公式は手元にないが、ないなら作ればよい。 $(k+1)^5 - k^5$ を足し合わせれば $\sum k^4$ が出るはずだ。中抜きなら $g(k) = \frac{1}{5}(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)$ 。つまりどちらも最後まで行ける。違うのは手数だけ、ということになりそう。

方針の候補

- (1) 展開して $\sum$ の公式を使う … $k(k+1) = k^2 + k$ で、 $\sum k^2$, $\sum k$ がそのまま使える。

▶ Point 7-1-6

- (1) 差の形を作って中抜きする … $g(k) = \frac{1}{3}(k-1)k(k+1)$ で差の形が作れる。

▶ Point 7-2-6

- (2) 差の形を作って中抜きする … $g(k) = \frac{1}{5}(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)$ で差の形が作れる。

▶ Point 7-2-6

- (2) 展開して $\sum$ の公式を使う … k^4 が現れるが、 $\sum k^4$ は $(k+1)^5 - k^5$ の和から自分で導ける。導けば公式で処理でき、同じ答えに届く。

▶ Point 7-1-6

解答

- (1) 【展開する方針】 $k(k+1) = k^2 + k$ であるから

▶ Point 7-1-6

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\} = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

【中抜きの方針】 $g(k) = \frac{1}{3}(k-1)k(k+1)$ とおくと

$$g(k+1) - g(k) = \frac{1}{3}k(k+1)\{(k+2) - (k-1)\} = k(k+1)$$

であるから

► Point 7-2-6

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = g(n+1) - g(1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - 0 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

一致する。

(2) 【中抜きの方針】 $g(k) = \frac{1}{5}(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)$ とおくと

$$g(k+1) - g(k) = \frac{1}{5}k(k+1)(k+2)(k+3)\{(k+4) - (k-1)\} = k(k+1)(k+2)(k+3)$$

であるから

► Point 7-2-6

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) = g(n+1) - g(1) = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

【展開する方針】 展開すると

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k$$

$\sum_{k=1}^n k^4$ の公式は手元にないので、まずこれを作る。 $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$ の両辺を $k=1$ から n まで加えると、左辺は中抜きされて $(n+1)^5 - 1$ となるから

$$(n+1)^5 - 1 = 5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 + 10 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 5 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

これを解いて

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

よって

► Point 7-1-6

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) &= \sum_{k=1}^n k^4 + 6 \sum_{k=1}^n k^3 + 11 \sum_{k=1}^n k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) + 6 \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 \\ &\quad + 11 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 6 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{30}n(n+1) \{ (2n+1)(3n^2+3n-1) + 45n(n+1) + 55(2n+1) + 90 \} \\ &= \frac{1}{30}n(n+1) (6n^3 + 54n^2 + 156n + 144) \\ &= \frac{1}{5}n(n+1) (n^3 + 9n^2 + 26n + 24) \\ &= \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \end{aligned}$$

中抜きと一致する。

[2つの解法の比較] (1) では、展開する方針は公式に代入して2行で終わる。中抜きの方針は $g(k)$ を自分で用意する一手が先に要る。**次数が低いうちは、覚えている公式に載せるほうが素直に進む。**

(2) では、中抜きの方針は g を1つ用意すれば $g(n+1) - g(1)$ で因数分解された形がそのまま出る。展開する方針は $\sum k^4$ を自分で導くところから始まり、最後に5次式を因数分解し直すことになる。**次数が上がるほど、この差は開いていく。**

つまりどちらの方針も正しく、違いは書く量と、その問題で何を用意する必要があるかにある。(1) と (2) で有利さが入れ替わるのが、そのことをよく表している。

この問題で身につくこと

- ・ $\sum$ の計算は入口が複数ある。展開でも中抜きでも同じ答えに届くのであって、どれか1つしか正解でない、ということはない。
- ・ 公式集に載っていないからといって、その方針が使えないとは限らない。 $\sum k^4$ のように必要なら自分で作れる。作り方は $(k+1)^5 - k^5$ の中抜き。
- ・ そのうえで、**手数が少ないほうを選ぶ**。「 $\sum$ の公式で足りるなら展開、次数が高いなら差の形」は、適否ではなく速さの目安。
- ・ 連続する整数の積は、**何個の積でも次数を1つ上げれば差の形が作れる**。 m 個の積なら $m+1$ 個の積を $m+1$ で割る。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 7-2-6 「差の形」を作れ！ ～中抜きのテクニク～

計算できないシグマがきたら……「差の形」を作れないか考えよ！

$$\sum_{k=1}^n \{g(k+1) - g(k)\} = g(n+1) - g(1)$$

$$(\because) \{g(n+1) - g(n)\} + \{g(n) - g(n-1)\} \\ + \cdots + \{g(2) - g(1)\}$$

となり、**途中の項がすべて打ち消し合う**からである。

差の形が特に効くのは、次の3つ。

- ① 分数数列の総和 → 部分分数分解で差の形を作る！ (Point 7-2-7)
- ② 連続する整数の積の和
- ③ (等差)×(等比) 型の数列の和 (Point 7-2-5) の別解

Point 7-1-6 $\sum$ の公式まとめ

(本文は問6参照)

問 21

表を上にして置かれた硬貨が1枚ある。1個のさいころを投げ、出た目が3の倍数ならば硬貨を裏返し、そうでなければ何もしない、という操作を考える。この操作を n 回行った後に硬貨が表である確率を p_n とするとき、 p_n を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：解ける漸化式は①引く ②割る ③うまく振り分けるで、i) 等差 ii) 等比 iii) 階差の3つに帰着させる。解けない漸化式は実験して予測 → 帰納法（数Ⅲなら不等式を作ってはさみうち）。

▶ Point 7-3-1

→ この問題も、まず3つの基本形のどれに落とすかを決める。

n 回分をまとめて数えようとすると、どの回で裏返したかの組合せが山ほど出てくる。まともに数え上げるのは重い。

一方で、操作は毎回同じで、硬貨の状態は「表」「裏」の2つしかない。ならば n 回目の状態から $n+1$ 回目の状態へどう移るか、という推移だけを見れば済むのでは？ 確率漸化式の出番だ。

▶ Point 7-2-12

3の倍数の目は3, 6の2通りだから、裏返す確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 、裏返さない確率は $\frac{2}{3}$ 。

$n+1$ 回目に表になるのは、「表のままだった」か「裏から裏返された」かの2通り。 n 回目裏である確率は $1-p_n$ と書けるので、状態は p_n ひとつで足りそう。

出発点は「表を上にして置かれた」なので $p_0 = 1$ 。1回操作した後は $p_1 = \frac{2}{3}$ 。

ずっと続ければ表と裏が五分五分に近づきそうだから、答えは $\frac{1}{2}$ に近づく形になるはず。

方針の候補

- n 回目と $n+1$ 回目を結ぶ推移を書き、漸化式を立てる … 状態が「表」「裏」の2つしかなく、しかも和が1なので、未知の数列为 p_n ひとつで済む。 ▶ Point 7-2-12
- △ n 回のうち裏返した回数で場合分けして直接足す … 最後まで押せば答えは出る。ただし「裏返した回数が偶数」の確率を $\sum$ で書くことになり、その和を1つの式にまとめる工夫が別に要る。
- △ 表・裏の確率を p_n, q_n と2つ置いて連立漸化式にする … これでも解ける。ただし $q_n = 1 - p_n$ なので、数列を2つ扱う分だけ遠回りになる。

解答

さいころの目が3の倍数となるのは3, 6の2通りであるから、1回の操作で硬貨を裏返す確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 、裏返さない確率は $\frac{2}{3}$ である。

n 回目の操作の後に硬貨が表である確率は p_n 、裏である確率は $1-p_n$ である。 $n+1$ 回目の操作の後に硬貨が表であるのは、次の排反な2つの場合である。

- (i) n 回目の後に表で、 $n+1$ 回目に裏返さない … 確率 $p_n \cdot \frac{2}{3}$

(ii) n 回目の後に裏で、 $n+1$ 回目に裏返す… 確率 $(1-p_n) \cdot \frac{1}{3}$

よって

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$$

また、はじめは表であるから $p_0 = 1$ であり、 $p_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ である。

ここで $\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}$ を解くと $\alpha = \frac{1}{2}$ であるから、辺々引いて

► Point 7-4-2

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$$

したがって数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{2} \right\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であり、 $n \geq 1$ において初項は $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

よって

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

($n=1$ のとき $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ 、 $n=2$ のとき $\frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{5}{9}$ となり、直接数えた値と一致する。またこの式は $n=0$ でも 1 となり、 $p_0 = 1$ と整合する。)

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 裏返した回数で場合分けして直接足す

n 回のうち裏返した回数が偶数のとき表であるから、 $p_n = \sum_{j:\text{偶数}} {}_nC_j \left(\frac{1}{3} \right)^j \left(\frac{2}{3} \right)^{n-j}$ 。二項定理より

$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right)^n = 1$ 、 $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right)^n = \left(\frac{1}{3} \right)^n$ で、後者は j が奇数の項の符号だけが反転したもの。辺々足して 2 で割ると、奇数の項が消えて $p_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}$ 。→ 同じ一般項を得る。

△ 表・裏の確率を p_n, q_n と2つ置いて連立漸化式にする

$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$ 、 $q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n$ 。辺々足すと $p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n = 1$ 、辺々引くと $p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{1}{3}(p_n - q_n)$ で、 $p_0 - q_0 = 1$ より $p_n - q_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n$ 。→ 同じ一般項を得る。 $q_n = 1 - p_n$ である分、数列を2つ扱う手間が増える。

この問題で身につくこと

- ・確率の問題で「操作を n 回くり返す」ときたら、 n 回分を数え上げるのではなく、 n 回目と $n+1$ 回目を結ぶ。これが確率漸化式。
- ・状態が2つで、確率の和が1なら、置く数列は1つで足りる。 $1-p_n$ を使うのがポイント。
- ・立てた漸化式は $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$ という特性方程式型。 n を大きくすると $\left(\frac{1}{3} \right)^n$ が小さくなり $\frac{1}{2}$ に近づく形になっていて、五分五分に落ち着くという感覚とも合っている。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 7-2-12 確率漸化式

(最初または最後の状態で場合分けをして) n 番目と $n+1$ 番目の推移図をかけ！

→ 漸化式立式

※ 推移図とは、 n 回目の各状態から、 $n+1$ 回目のどの状態へ、どの確率で移るかを樹形図の形に書き出したもの。状態の取りこぼしを防げるうえ、そのまま漸化式になる。

Point 7-4-2 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型

特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ 利用！

辺々引いた $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形して等比数列に帰着！

問 24

次の各漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ について、「①引く」「②割る」「③うまく振り分ける」のうち**使える方針を挙げ**、それぞれ等差・等比・階差のいずれの数列に帰着するかを述べよ。使えないものについては、その理由を述べよ。(一般項を最後まで求める必要はない。)

- (1) $a_{n+1} = 3a_n + 5$ (2) $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$
 (3) $(n+1)a_{n+1} = na_n$ (4) $a_{n+1} = a_n + n^2 - 1$

問題を見て思うこと

章のフロー：解ける漸化式は①引く ②割る ③うまく振り分けるで、i) 等差 ii) 等比 iii) 階差の3つに帰着させる。解けない漸化式は**実験して予測** → 帰納法(数Ⅲなら不等式を作ってはさみうち)。

▶ Point 7-3-1

→ この問題も、まず3つの基本形のどれに落とすかを決める。

まず前提の確認から。素のまま解ける漸化式は**等差・等比・階差の3つ**だけだった。

▶ Point 7-4-1 だから漸化式を見たときにやることは、「この3つのどれに寄せられるか」「そのために何を消せばいいか」を決めること。消し方の道具が①引く・②割る・③うまく振り分ける、の3つ。

▶ Point 7-3-1

今回は「使える方針を挙げよ」。つまり4つの漸化式を、道具ごとに仕分ける作業だ。1つ選んで終わりではなく、**3つの道具を順に当ててみて、通るか通らないかを1つずつ確かめる**。

そう思って4つを見比べると、 a_n に付いている余計なものがそれぞれ違う。

(1) $a_{n+1} = 3a_n + 5$: 余計なのは**定数** 5。定数なら③で振り分けられる。5は n で動かないので、①引くも②割るも詰まりそうにない。**3つとも通るのでは?**

(2) $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$: 余計なのは 3^n で、**定数ではなく n で動く**。②割れば吸収できる。③も、振り分けるものを定数 α ではなく $g(n) = 3^n$ のような n の式にすれば通るかもしれない。①はずらして引いても同じ形が残るだけでは?

(3) $(n+1)a_{n+1} = na_n$: a_n の**係数に n が付いている**。左辺は「 $n+1$ と a_{n+1} 」、右辺は「 n と a_n 」で**添字がそろっている**から、 na_n をかたまりと見れば $b_{n+1} = b_n$ 。②割るも、比の形にすれば中抜きで届きそうだ。

(4) $a_{n+1} = a_n + n^2 - 1$: 移項すると $a_{n+1} - a_n = n^2 - 1$ でもう**階差の形そのもの**。 a_n の係数が1なので、②割るは何も変えないはずだ。

方針の候補

- (1) ③うまく振り分ける ... $\alpha = 3\alpha + 5$ で α を求め、 $a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$ と変形して**等比**へ。

▶ Point 7-4-2

- (1) ①引く ... ずらして辺々引くと $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$ 。階差数列が等比になるので**階差**へ。

- (1) ②割る ... 両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{5}{3^{n+1}}$ となり**階差**へ。

- × (1) そのまま等比とみる ... +5があるので公比3の等比数列ではない。 a_1 を決めて $n=1, 2$ を試

せばずれることがすぐ分かる。

- (2) ②割る $\dots 2^{n+1}$ で割れば**階差**へ、 3^{n+1} で割れば特性方程式を経て**等比**へ。 ▶ Point 7-4-4
- (2) ③うまく振り分ける $\dots$ 振り分けるものを定数ではなく $g(n) = 3^n$ とすると $a_{n+1} - 3^{n+1} = 2(a_n - 3^n)$ となり**等比**へ。 ▶ Point 7-4-3
- × (2) ①引く $\dots$ ずらして引くと $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 2 \cdot 3^n$ となり、階差数列についても**と同じ型の漸化式が残る**だけで、等差・等比・階差のどれにも帰着しない。
- × (2) ③を「定数 α 」で振り分ける $\dots \alpha = 2\alpha + 3^n$ とすると α が n によって変わってしまい、定数として振り分けられない。 3^n が定数でないことが理由。
- (3) ③うまく振り分ける $\dots b_n = na_n$ とおくと $b_{n+1} = b_n$ 、すなわち公差 0 の**等差**（定数列）。
- (3) ②割る $\dots \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$ という比の形になる。これは**階差の掛け算版**で、辺々掛け合わせる途中が打ち消し合う。
- × (3) ①引く $\dots$ ずらして辺々引いても係数の n が残るうえ、もとの式と同じことしか言えず、新しい情報が出ない。
- × (3) 特性方程式（定数 α ）を使う $\dots a_n$ の係数が n で動くため α が定まらない。**係数が定数でない**ので、この道具は使えない。
- (4) そのまま**階差**とみる $\dots a_{n+1} - a_n = n^2 - 1$ は階差数列が $n^2 - 1$ であることを述べた式そのもの。 ▶ Point 7-1-7
- (4) ③うまく振り分ける $\dots g(n+1) - g(n) = n^2 - 1$ となる g を用意すれば $a_{n+1} - g(n+1) = a_n - g(n)$ となり、 $\{a_n - g(n)\}$ は定数列（公差 0 の**等差**）。 ▶ Point 7-4-3
- (4) ①引く $\dots$ ずらして引くと $b_n = a_{n+1} - a_n$ について $b_{n+1} - b_n = 2n + 1$ となり、 $\{b_n\}$ の**階差**が分かる。そこから b_n 、さらに a_n へと 2 段で戻れる。
- × (4) ②割る $\dots a_n$ の係数が 1 なので、 1^{n+1} で割ることになり式が何も変わらない。
- × (4) 特性方程式（定数 α ）を使う $\dots n^2 - 1$ は定数でないうえ、 a_n の係数が 1 なので $\alpha = \alpha + n^2 - 1$ は解を持たない。

■ 解答

解ける漸化式は**等差・等比・階差**の 3 つであり、それ以外の形はこの 3 つに帰着させる。以下、各式について使える方針を順に見ていく。

(1) $a_{n+1} = 3a_n + 5$ ①②③のいずれも使える。

③うまく振り分ける → **等比**。 $\alpha = 3\alpha + 5$ すなわち $\alpha = -\frac{5}{2}$ と定めて辺々引くと

$$a_{n+1} + \frac{5}{2} = 3 \left(a_n + \frac{5}{2} \right)$$

となり、 $\left\{ a_n + \frac{5}{2} \right\}$ は公比 3 の等比数列。

▶ Point 7-4-2

①引く → **階差**。 $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 5$ と辺々引くと $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$ となり、階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ が公比 3 の等比数列。

②割る → 階差。両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{5}{3^{n+1}}$ となり、 $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$ の階差が分かる。

(2) $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ ②と③が使える。①は使えない。

②割る → 階差、または等比。両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

であり、 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおけば $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ で階差数列に帰着する。また両辺を 3^{n+1} で割って $c_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおけば $c_{n+1} = \frac{2}{3}c_n + \frac{1}{3}$ となり、(1) と同じ型なので特性方程式を経て等比数列に帰着する。

▶ Point 7-4-4

③うまく振り分ける → 等比。振り分けるものを定数ではなく $g(n) = 3^n$ とすると

$$a_{n+1} - 3^{n+1} = 2a_n + 3^n - 3 \cdot 3^n = 2(a_n - 3^n)$$

となり、 $\{a_n - 3^n\}$ は公比 2 の等比数列。

▶ Point 7-4-3

①引く (使えない)。ずらして辺々引くと $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 2 \cdot 3^n$ となり、階差数列についてもと同じ型の漸化式が残るだけである。この操作だけでは等差・等比・階差のいずれにも帰着しない。

なお③についても、振り分けるものを定数 α にとると $\alpha = 2\alpha + 3^n$ から $\alpha = -3^n$ となり、 α が n で動いてしまう。定数としての振り分けが使えないのは、 3^n が定数でないためである。

(3) $(n+1)a_{n+1} = na_n$ ②と③が使える。①は使えない。

③うまく振り分ける → 等差 (公差 0)。左辺は $n+1$ と a_{n+1} 、右辺は n と a_n の積で添字がそろっているから、 $b_n = na_n$ とおくと

$$b_{n+1} = b_n$$

すなわち $\{b_n\}$ は公差 0 の等差数列 (定数列) であり、 $na_n = a_1$ 、すなわち $a_n = \frac{a_1}{n}$ 。

②割る → 階差の掛け算版 (比の中抜き)。 $a_n \neq 0$ のとき両辺を a_n で割り、さらに $n+1$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$$

この比を $n=1$ から $n-1$ まで辺々掛け合わせると、途中が打ち消し合って $\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n}$ を得る。差をとって足し戻すのが階差なら、こちらは比をとって掛け戻す形であり、同じ中抜きの理屈で一般項に届く。

①引く (使えない)。ずらして辺々引いても係数の n が残り、しかももとの式を言い換えただけで新しい情報が出ない。

また、 a_n の係数が n で動くため、特性方程式 (定数 α) も使えない。

(4) $a_{n+1} = a_n + n^2 - 1$ ①と③が使える (そもそも変形なしで階差)。②は使えない。

そのまま → 階差。移項すると

$$a_{n+1} - a_n = n^2 - 1$$

であり、これは階差数列が $n^2 - 1$ であることを述べた式そのものである。よって $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1) \quad (n = 1 \text{ のときは別に確認する}).$$

▶ Point 7-1-7

③うまく振り分ける → 等差(公差 0)。 $g(n+1) - g(n) = n^2 - 1$ となる g を用意すると $a_{n+1} - g(n+1) = a_n - g(n)$ となり、 $\{a_n - g(n)\}$ は定数列になる。

▶ Point 7-4-3

①引く → (階差数列の) 階差。 $b_n = a_{n+1} - a_n$ においてずらして引くと $b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ となり、 $\{b_n\}$ の階差が分かる。ここから b_n を求め、さらに a_n へ戻せる。

②割る (使えない)。 a_n の係数が 1 であるから、 1^{n+1} で割ることになり式は何も変わらない。また $n^2 - 1$ は定数でなく係数も 1 であるから、 $\alpha = \alpha + n^2 - 1$ を満たす定数 α は存在せず、特性方程式も使えない。

この問題で身につくこと

- ・漸化式は型を 1 つずつ暗記するものではなく、「解ける 3 つ (等差・等比・階差) に寄せる」という一本の枠組みで見る。寄せ方が①引く・②割る・③うまく振り分けるの 3 つ。
- ・型を見分ける決め手は「 a_n に付いている余計なものは何か」。定数なら振り分け、 r^n なら割る、 n の多項式なら階差、係数に n が入るならかたまりで置きかえ。
- ・(1) のように 3 つとも通ることもある。通る方針が複数あるとき、その中に「適切／不適切」の区別はない。あるのは手数の差だけで、迷ったら少ないほうを選べばよい。
- ・一方で (2) の①や (4) の②のように、通らない方針もある。通らない理由は必ず言葉にできる (同じ型が残る、式が変わらない、 α が n で動く)。「使えない」と「遠回り」は別物である。
- ・③は「定数を振り分ける」だけではない。(2) の $g(n) = 3^n$ のように n の式を振り分けるのも③であり、こう広げて見ると使える場面が増える。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 7-3-1 3 つの基本的方針

解ける漸化式ときたら …

①引く！、②割る！、③うまく振り分ける！ ことで、i) 等差、ii) 等比、iii) 階差数列の 3 つの基本の漸化式に帰着させる！

解けない漸化式ときたら …

まずは $n = 1, 2, 3, \dots$ を代入して実験し、予測して帰納法 (数 3 では不等式を作ってはさみうち！)

Point 7-4-1 解ける 3 つの漸化式

① 等差数列： $a_{n+1} = a_n + d$ (d : 公差)

② 等比数列： $a_{n+1} = ra_n$ (r : 公比)

③ 階差数列： $a_{n+1} = a_n + f(n)$

この先扱う応用形はすべて「解ける漸化式」である上記 3 パターン (特に等比) に帰着させる！

Point 7-4-2 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型

特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ 利用！

辺々引いた $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形して等比数列に帰着！

Point 7-4-4 $a_{n+1} = pa_n + r^n$ 型

両辺 r^{n+1} で割る！ → 特性方程式 → 等比数列へ

別解：両辺 p^{n+1} で割る！ → 階差数列へ

Point 7-1-7 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 、階差数列 $\{b_n\}$ とすると、

$$n \geq 2 \text{ のとき、 } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

※ $n = 1$ のときは a_1 をそのまま用いる。 $n \geq 2$ のときに求めた a_n に $n = 1$ を代入して a_1 と一致すれば、 $n \geq 1$ の1つの式にまとめよう。

選ばなかった方針の Point (参考)

Point 7-4-3 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ 型

① $a_{n+1} - g(n+1) = p\{a_n - g(n)\}$ の形にうまく振り分ける！ → 等比数列へ

② ずらして引いて階差！

問 67

(1) すべての自然数 k について $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ が成り立つことを示せ。(2) (1) を用いて、 $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$ を示せ。(3) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：解ける漸化式は①引く ②割る ③うまく振り分けるで、i) 等差 ii) 等比 iii) 階差の3つに帰着させる。解けない漸化式は実験して予測 → 帰納法。

▶ Point 7-3-1

→ 和の証明。→ 手は2つ。(a) 数学的帰納法と (b) 中抜き (差の形を作る)。

→ まず小さい n で確かめる。 $n=1$: 左辺 $1 \cdot 1! = 1$ 、右辺 $2! - 1 = 1$ 。 $n=2$: 左辺 $1+2 \cdot 2 = 5$ 、右辺 $3! - 1 = 5$ 。→ 合っている。

→ 右辺が $(n+1)! - 1$ という「両端だけ」の形。→ これは中抜きの匂いがする。▶ Point 7-2-6

→ 中抜きにするには、 $k \cdot k!$ を (何か) $_{k+1}$ - (何か) $_k$ の形にしたい。

→ 右辺の形から、(何か) $_k = k!$ ではないか。→ 試してみる。 $(k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = k! \{(k+1) - 1\} = k \cdot k!$ 。→ ぴったり一致した。

→ あとは足すだけ。→ 途中が全部打ち消し合って、両端だけが残る。

→ 帰納法でも書ける。→ どちらでもよいが、中抜きのほうが「なぜその形になるか」が見える。

(3) → 分母に階乗が来た。→ ここでも差の形を狙う。

→ 分子の k を $(k+1) - 1$ と書き直すのが一手。→ $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!}$ 。

→ 分けると $\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}$ 。→ 前半は $\frac{1}{k!}$ ($(k+1)! = (k+1) \cdot k!$ より)。

→ よって $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ 。→ きれいな差の形になった。

→ 足せば両端だけが残る。→ $1 - \frac{1}{(n+1)!}$ 。→ n を大きくすると1に近づく。→ 小さい n で検算すると、 $n=1$ で $\frac{1}{2}$ 、 $n=2$ で $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ 。→ 合っている。

→ (2) と (3) は同じ道具の表と裏。 $k \cdot k!$ は「掛ける」側、 $\frac{k}{(k+1)!}$ は「割る」側だが、どちらも $(k+1) - 1$ を作ることで差の形になる。

方針の候補

○ $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ と差の形に書き直し、中抜きする。▶ Point 7-2-6

○ 数学的帰納法で示す。 $n = m+1$ では $(m+1)! - 1 + (m+1) \cdot (m+1)!$ を整理する。▶ Point 7-5-1

△ $\sum k \cdot k!$ を $\sum$ の公式で展開しようとする... $k!$ は k の多項式ではないので、 $\sum k$ 、 $\sum k^2$ の公式は使えない。差の形を作るか、帰納法に切りかえる。

× $k \cdot k! = (k+1)!$ とする... 正しくは $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$ で、 $k \cdot k!$ とは違う。差が $k!$ だけずれる。階乗の定義に戻って確かめること。この1文字のずれが、そのまま「-1」の正体になっている。

■ 解答

(1) $k \geq 1$ のとき、 $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$ であるから

$$(k+1)! - k! = (k+1) \cdot k! - k! = k! \{(k+1) - 1\} = k \cdot k!$$

すなわち

$$k \cdot k! = (k+1)! - k!$$

(2) (1) より

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = \sum_{k=1}^n \{(k+1)! - k!\}$$

$k = 1, 2, \dots, n$ を書き出すと

$$(2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + \{(n+1)! - n!\}$$

となり、途中の項が打ち消し合って両端だけが残る。したがって

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$$

($n=1$ で $1=2-1$ 、 $n=2$ で $1+4=5=6-1$ 、 $n=3$ で $5+18=23=24-1$ 。すべて一致する。)

(3) 分子の k を $k = (k+1) - 1$ と書き直すと、 $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$ より

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1) \cdot k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

よって

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

となり、途中の項が打ち消し合って

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

($n=1$ で $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ 、 $n=2$ で $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$ 。一致する。)

別の方針でも解いてみる (略解)

△ 数学的帰納法で示す道

$n=1$ のとき、左辺 = 1、右辺 = $2! - 1 = 1$ で成り立つ。 $n=m$ で成り立つと仮定すると

$$\sum_{k=1}^{m+1} k \cdot k! = \{(m+1)! - 1\} + (m+1) \cdot (m+1)! = (m+1)! \{1 + (m+1)\} - 1 = (m+2)! - 1$$

よって $n=m+1$ でも成り立つ。→ 同じ結論に到達する。 $(m+1)!$ でくくるのがこの道の一手。

△ 実験から差の形を見つける道

部分和を書き出すと 1, 5, 23, 119, ...。→ それぞれに 1 を足すと 2, 6, 24, 120。→ これは $2!, 3!, 4!, 5!$ 。

→ 部分和が $(n+1)! - 1$ だと読める。→ ということは各項は $(k+1)!$ と $k!$ の差のはず、と逆算できる。
 → 同じ結論に到達する。答えの形から差の形を逆算するのは、中抜きを思いつくための常套手段。

この問題で身につくこと

- ・和の証明は帰納法と中抜きの 2 本立て。どちらでも書ける。
- ・右辺が「両端だけ」の形なら中抜きを疑う。 $(n+1)! - 1$ はまさにその形。
- ・差の形は答えの形から逆算できる。 $(何か)_{k+1} - (何か)_k$ の「何か」を右辺から読む。
- ・ $k!$ は k の多項式ではないので、 $\sum$ の公式は使えない。
- ・ $(k+1)! = (k+1) \cdot k!$ を定義に戻って確かめる。 $k \cdot k!$ との違いがそのまま「 -1 」を生む。
- ・分子に k が浮いていたら $k = (k+1) - 1$ と書き直す。分母の階乗と噛み合って、差の形になる。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 7-2-6 「差の形」を作れ！ ～中抜きのテクニク～

(本文は問 15 参照)

Point 7-5-1 数学的帰納法

(本文は問 37 参照)