この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学II BC 第 6 章「積分法」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 1　次の (1)〜(3) を求めよ。さらに、**不定積分と定積分の違い**を述べ、**なぜ面積が積分で求まるのか**を説明せよ。

(1) $\displaystyle\int \left(3x^2-4x+1\right)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2-4x+1\right)dx$

(3) 放物線 $y=x^2-2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積　（Point 6-2-2）

問 17　次に答えよ。

(1) 曲線 $y=x^3$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^3 \left(x^2-2x\right)dx$ を求めよ。また、曲線 $y=x^2-2x$ と x 軸、2 直線 $x=0,\ x=3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。2 **つの値が違うのはなぜか**を説明せよ。　（Point 6-2-8）

問 22　次の面積を、2 **通りの方法**で求めて比べよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ と y 軸で囲まれた、$x \geqq 0$ の部分

(2) 放物線 $y=x^2$ と、その $x=1$ における接線と、x 軸で囲まれた部分　（Point 6-2-16）

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 33　曲線 $C: y=\left|x^2-2x\right|$ について、次に答えよ。

(1) C の概形をかけ。

(2) $k>0$ とする。C と直線 $y=k$ の共有点の個数を、k の値で場合分けして求めよ。

(3) C と直線 $y=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　（Point 6-2-9）

解説編（見本）

問 1

次の (1)〜(3) を求めよ。さらに、**不定積分と定積分の違い**を述べ、**なぜ面積が積分で求まるのか**を説明せよ。

(1) $\displaystyle\int (3x^2-4x+1)\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2-4x+1)\,dx$　(3) 放物線 $y=x^2-2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積

問題を見て思うこと

章のフロー：面積は**①交点を求めて区間を決める** → **②どちらが上かを確定する** → **③ (上)−(下) を積分する**。この問題は (3) がその実践。

→ (1) 不定積分は**微分すると元に戻る関数**を探す。x^n → $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ と逆をたどり、最後に $+C$。 ▶ Point 6-2-1

→ (2) 定積分は原始関数の**両端の差**。$+C$ は引き算で消える。→ **不定積分は関数（の集まり）、定積分は数**。 ▶ Point 6-2-2

→ (3) $x(x-2)=0$ より区間は $0 \leqq x \leqq 2$。この区間で放物線は x 軸の下。→ 上が x 軸だから $\displaystyle\int_0^2 (2x-x^2)dx = \frac{4}{3}$。上下を取り違えると符号が逆になる。

→ 面積が積分で求まる理由。a から x までの面積を $S(x)$ とおくと、増えた部分は**幅 h、高さ約 $f(x)$ の細長い長方形**。→ $S(x+h)-S(x) \fallingdotseq f(x)h$ を h で割って $h \to 0$ とすると $S'(x)=f(x)$。

→ **面積は原始関数**。→ だから $S=F(b)-F(a)$。

解答

(1)

$$\int (3x^2-4x+1)\,dx = \boldsymbol{x^3-2x^2+x+C} \qquad (C\text{は積分定数})$$

(2)

$$\int_0^2 (3x^2-4x+1)\,dx = \Big[x^3-2x^2+x\Big]_0^2 = (8-8+2)-0 = \boldsymbol{2}$$

(3)　$x^2-2x=x(x-2)$ より、放物線と x 軸の共有点の x 座標は $x=0,\ 2$。また $0<x<2$ では $x^2-2x<0$ であるから、この区間で放物線は x 軸より下にある。よって求める面積 S は

$$S=\int_0^2 \{0-(x^2-2x)\}\,dx = \int_0^2 (2x-x^2)\,dx = \left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4-\frac{8}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

[不定積分と定積分の違い]　不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は「微分すると $f(x)$ になる関数」全体を表し、$F(x)+C$ という**関数の集まり**である。一方 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ は 1 **つの数**である。定積分では積分定数 C が引き算で消えるため、どの原始関数を選んでも値は変わらない。

[なぜ面積が積分で求まるか]　$f(x) \geqq 0$ とし、a から x までの、曲線 $y=f(x)$ と x 軸の間の面積を $S(x)$ とおく。x を h だけ増やしたときに増える面積 $S(x+h)-S(x)$ は、幅 h、高さがおよそ $f(x)$ の細長い部分だから

$$S(x+h)-S(x) \fallingdotseq f(x)\,h \qquad \therefore \quad \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \fallingdotseq f(x)$$

ここで $h \to 0$ とすると $S'(x)=f(x)$、すなわち**面積を表す関数は $f(x)$ の原始関数**である。したがって $S(x)=F(x)+C$ とおけ、$S(a)=0$ より $C=-F(a)$。よって

$$S(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

となり、面積が定積分で求まる。

方針の候補

○ 不定積分は**微分の逆**。x^n は $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$。$+C$ **を忘れない**。 ▶Point 6-2-1

○ 定積分は**原始関数の両端の差**。答えは**数**。 ▶Point 6-2-2

○ 面積は**①区間** → **②上下** → **③ (上)−(下)** の 3 手順。 ▶Point 6-2-8

△ (3) を 6 分の 1 公式 $\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}\cdot 2^3=\dfrac{4}{3}$ で出す … 正しい。ただし**公式の意味**を先に押さえたい。 ▶Point 6-2-11

× (2) で $+C$ を書く … 定積分は**数**。C は差で消える。

× (3) で $\displaystyle\int_0^2 (x^2-2x)dx=-\frac{4}{3}$ を答えにする … **面積は正**。上下を確定していない証拠。

×「積分＝面積」と暗記だけする … x **軸より下では定積分が負**になる。面積とは一致しない。

この問題で身につくこと

- **不定積分は関数、定積分は数**。$+C$ は定積分では消える。
- 積分は**微分の逆**をたどる計算。$x^n \to \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$。
- 面積の手順は**①区間を決める** → **②上下を確定する** → **③ (上)−(下) を積分**。
- 間違えるのは**ほとんど②**。上下の取り違えは符号ミスになる。
- x **軸より下では定積分は負**。面積とは一致しない。
- 面積が積分で求まる理由は**「面積を微分すると元の関数」**だから。
- この章の型は**積分計算・積分方程式・絶対値付き定積分・面積**の 4 つ。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 6-2-1 不定積分とその性質

$F'(x)=f(x)$ のとき $\displaystyle\int f(x)\,dx=F(x)+C$（$C$ は積分定数）。とくに n が 0 以上の整数のとき

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, \qquad \int\{kf(x)+lg(x)\}\,dx=k\int f(x)\,dx+l\int g(x)\,dx$$

Point 6-2-2 定積分とその性質

$F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

Point 6-2-8 面積の積分計算

区間 $a \leqq x \leqq b$ でつねに $f(x) \geqq g(x)$ のとき、2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_a^b \big\{(\text{上}) - (\text{下})\big\}\,dx$$

問 17

次に答えよ。

(1) 曲線 $y = x^3$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^3 \left(x^2 - 2x\right) dx$ を求めよ。また、曲線 $y = x^2 - 2x$ と x 軸、2 直線 $x = 0,\ x = 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。2 **つの値が違うのはなぜか**を説明せよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：面積は**①交点** → **②上下** → **③ (上)−(下)**。間違えるのはほとんど②。▶ **Point 6-2-8**

→ この問題は**②の練習**。上下が**途中で入れかわる**。

→ (1) ① $x(x^2 - 1) = 0$ より $x = -1,\ 0,\ 1$。**交点が 3 つ**なので、囲まれた部分も 2 つ。② $x = \pm\dfrac{1}{2}$ で試すと、$0 < x < 1$ は直線が上、$-1 < x < 0$ は曲線が上。**区間ごとに分けて**積分する。

→ $x^3 - x$ は**奇関数**で、2 つの部分は合同。　▶ **Point 6-2-7**　→ $\displaystyle 2\int_0^1 \left(x - x^3\right) dx = \frac{1}{2}$。

→ (2) 定積分は $\left[\dfrac{x^3}{3} - x^2\right]_0^3 = 0$。面積が 0 のはずはない。**ここが核心**。

→ 面積は $[0, 2]$ で負、$[2, 3]$ で正なので分けて、$\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$。

→ 違う理由は、**定積分は x 軸より下を負で数える**から。$-\dfrac{4}{3}$ と $+\dfrac{4}{3}$ が打ち消し合った。面積はどちらも正で数える。

解答

(1)　$x^3 = x$ より $x\left(x^2 - 1\right) = 0$、すなわち $x = -1,\ 0,\ 1$。

$0 < x < 1$ では（$x = \dfrac{1}{2}$ で $\dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{2}$ より）直線が上、$-1 < x < 0$ では（$x = -\dfrac{1}{2}$ で $-\dfrac{1}{8} > -\dfrac{1}{2}$ より）曲線が上である。$x^3 - x$ は奇関数だから 2 つの部分の面積は等しく

$$S = 2\int_0^1 \left(x - x^3\right) dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2)　まず定積分は

$$\int_0^3 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^3 = 9 - 9 = \boldsymbol{0}$$

つぎに面積を求める。$x^2 - 2x = x(x - 2)$ より、$0 \leqq x \leqq 2$ では放物線が x 軸より下、$2 \leqq x \leqq 3$ では上にある。よって

$$S = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx + \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right) dx = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

[2 **つの値が違う理由**]　定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は、$f(x) > 0$ の部分を正、$f(x) < 0$ の部分を**負**として数えた**符号つきの量**である。この問題では $0 \leqq x \leqq 2$ の部分が $-\dfrac{4}{3}$、$2 \leqq x \leqq 3$ の部分が $+\dfrac{4}{3}$ となり、両者が打ち消し合って 0 になった。

一方、面積は**どちらの部分も正**として数える。したがって $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ となる。面積を求めるときは、$f(x)$ **の符号が変わる点で区間を分け、各区間で (上)−(下) の形にしてから**積分しなければならない。

方針の候補

○ 交点が 3 つ以上なら**上下が入れかわる**。区間ごとに分ける。 ▶ Point 6-2-8

○ **定積分は符号つき、面積はつねに正**。この違いを言えるように。

○ 対称性（奇関数）が使えれば**半分だけ求めて 2 倍**。 ▶ Point 6-2-7

△ (2) を $\displaystyle\int_0^3 \left|x^2-2x\right| dx$ と書いて求める … うまくいく。むしろ**面積の定義そのもの**。 ▶ Point 6-2-10

× (1) で $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x-x^3\right) dx=0$ を面積とする … **打ち消し合っただけ**。

× (2) で「面積は 0」と答える … 定積分と面積の**混同**。

× 交点をすべて求めない … 3 次と直線なら**交点は最大 3 つ**。

この問題で身につくこと

- **定積分は符号つき、面積はつねに正**。この区別が本問の主題。
- x 軸より下の部分は**定積分では負**に数えられる。
- 面積を求めるなら**符号の変わる点で区間を切る**。
- 交点が 3 つ以上あれば**上下が入れかわる**と疑う。
- 3 次と直線の交点は**最大 3 つ**。すべて求める。
- 対称性（奇関数）が使えるなら**半分求めて 2 倍**。
- 面積は $\displaystyle\int |f(x)|dx$ と書ける。困ったらこの形に戻る。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 6-2-8 面積の積分計算（上下が入れかわる場合）

$f(x)$ の符号（あるいは 2 曲線の上下）が区間の途中で変わるときは、**符号が変わる点で区間を分け**、それぞれの区間で (上) − (下) の形にしてから積分する。すなわち

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

であり、定積分 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$ とは一般に一致しない。

問 22

次の面積を、2 **通りの方法**で求めて比べよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ と y 軸で囲まれた、$x \geqq 0$ の部分

(2) 放物線 $y=x^2$ と、その $x=1$ における接線と、x 軸で囲まれた部分

問題を見て思うこと

章のフロー：面積は**①交点** → **②上下** → **③ (上)−(下)**。③は**そのまま積分するとは限らない**。

▶ Point 6-2-16

→ 計算を始める前に**「このまま積分するのが一番計算が短く済むか」**を見る。手は 3 つ。①三角形・台形は**積分しない** ②**全体から引く** ③**対称性で半分だけ**求めて 2 倍。

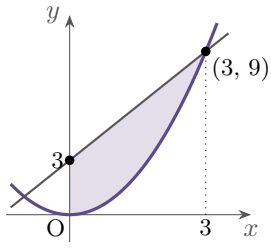
→ (1) $x^2=2x+3$ より $x=-1,\ 3$。$x \geqq 0$ なので区間は $[0,3]$、直線が上。そのまま積分すると $\left[x^2+3x-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^3=9$。

→ 直線の下は**台形**（上底 3、下底 9、高さ 3）で 18。→ $18-\displaystyle\int_0^3 x^2dx=18-9=9$。積分するのは x^2 だけ。

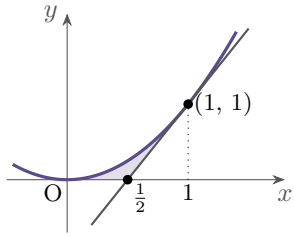
→ (2) 接線は $y=2x-1$（問 19）で、x 切片は $\dfrac{1}{2}$。区間を切ると $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 (x-1)^2dx=\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{12}$。

→ 全体から引く：$\displaystyle\int_0^1 x^2dx=\dfrac{1}{3}$ から、頂点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$, $(1,0)$, $(1,1)$ の**三角形**（底 $\dfrac{1}{2}$、高さ 1、面積 $\dfrac{1}{4}$）を引いて $\dfrac{1}{12}$。こちらのほうが書く量が少ない。

解答



(1)



(2)

(1)　$x^2=2x+3$ より $x=-1,\ 3$。$x \geqq 0$ の部分は $0 \leqq x \leqq 3$ で、この区間では直線が上にある。

[方法 A：そのまま積分]

$$S=\int_0^3 \{(2x+3)-x^2\}\,dx=\left[x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=9+9-9=\mathbf{9}$$

[方法 B：台形から引く]　直線 $y=2x+3$ の下側で $0 \leqq x \leqq 3$ の部分は、上底 3、下底 9、高さ 3 の

台形であるから

$$S=\frac{(3+9)\times 3}{2}-\int_0^3 x^2dx=18-9=9$$

方法 B では**積分するのは x^2 だけ**で済む。

(2)　$x=1$ における接線は $y=2x-1$ で、x 軸との交点は $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ である。

[方法 A：区間を切る]

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{x^2-(2x-1)\right\}dx=\frac{1}{24}+\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

[方法 B：全体から三角形を引く]　放物線と x 軸、直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積は $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$。ここから、3 点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$ を頂点とする三角形（底辺 $\frac{1}{2}$、高さ 1）の面積を引けばよいから

$$S=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

方針の候補

○ **三角形・台形は積分しない**。公式で出す。 ▶Point 6-2-16

○ **全体から引く**と積分が 1 本で済むことが多い。

○ 計算を始める前に**「このまま積分するのが一番計算が短く済むか」**を一度確認。

△ そのまま区間を切って積分する ･･･ うまくいく。答えも同じ。**どちらが計算が短く済むかは場合による**。

× (2) で x 軸と接線の交点 $x=\frac{1}{2}$ を求め忘れる ･･･ **図形の頂点**。必要。

× 三角形の底辺を 1 とする ･･･ $\frac{1}{2}$ から 1 まで。**底は** $\frac{1}{2}$。

× 工夫にこだわりすぎて時間を使う ･･･ **計算が短く済むほうを選ぶ**のが目的。迷ったら素直に。

この問題で身につくこと

・面積は**与えられた形のまま積分しなくてよい**。
・**三角形・台形は積分せず**に公式で。
・**全体から引く**と積分が 1 本になることが多い。
・**対称性**が使えれば半分求めて 2 倍。
・6 分の 1・12 分の 1・3 分の 1 公式が使える部分を**探して引く**のも手。
・**計算を始める前に一度見比べる**のが本質。
・工夫が思いつかなければ**素直に**やる。それでよい。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 6-2-16 求めやすい面積を用いよ！
面積を求めるとき、与えられた形のまま最後まで積分する必要はない。
- 三角形・台形など、**積分せずに面積が求まる部分**は積分しない

- **全体から一部を引く**ほうが速いことがある
- **対称性**が使えるなら半分だけ求めて 2 倍する

「本当にこのまま積分するのが一番速いか？」を、計算を始める前に一度確認する。

問 33

曲線 $C : y = \left|x^2 - 2x\right|$ について、次に答えよ。
(1) C の概形をかけ。 (2) $k > 0$ とする。C と直線 $y = k$ の共有点の個数を、k の値で場合分けして求めよ。
(3) C と直線 $y = 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

問題を見て思うこと

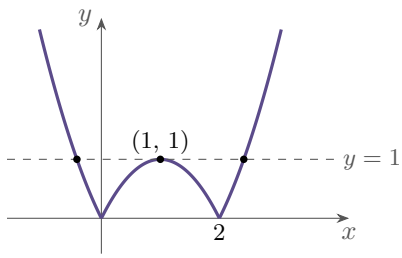
章のフロー：面積は**①交点** → **②上下** → **③ (上)−(下)**。絶対値では**①が場合分け**になる。

▶ **Point 6-2-9**

→ (1) $y = x(x-2)$ は x 切片 $0,\ 2$、頂点 $(1, -1)$。$0 < x < 2$ を折り返すと頂点が $(1, 1)$ へ移り、山の高さは 1。
→ (2) 水平線 $y = k$ を下げていくと、山の高さ 1 が**分かれ目**。$k > 1$ は外側の 2 本だけで 2 **個**、$k = 1$ は山の頂上を加えて 3 **個**、$0 < k < 1$ は山の左右も加わって 4 **個**。
→ 式でも確認。$x^2 - 2x = k$ は $D/4 = 1 + k > 0$ でつねに 2 個（外側）。$x^2 - 2x + k = 0$ は $D/4 = 1 - k$ で、$k < 1$ なら 2 個、$k = 1$ なら 1 個、$k > 1$ なら 0 個。図と一致。
→ (3) $k = 1$ の交点は $x = 1 - \sqrt{2},\ 1,\ 1 + \sqrt{2}$。直線 $y = 1$ が上で、$x = 1$ で C が触れるため 2 **つの部分**に分かれる。全体は**直線** $x = 1$ **に関して対称**。
→ 区間を $[0, 2]$ と $[2,\ 1 + \sqrt{2}]$ に切る。真ん中は $1 - (2x - x^2) = (x-1)^2$ の**完全平方**で $\displaystyle\int_0^2 (x-1)^2 dx = \frac{2}{3}$。
→ 端は $u = x - 1$ とおくと $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \left(2 - u^2\right) du = \frac{4\sqrt{2} - 5}{3}$。対称なので 2 倍して、$\displaystyle\frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4\sqrt{2} - 5}{3} = \frac{8\left(\sqrt{2} - 1\right)}{3} \fallingdotseq 1.10$。

解答

(1) $x^2 - 2x = x(x-2)$ より、$y = x^2 - 2x$ の $0 < x < 2$ の部分（x 軸より下）を x 軸で折り返す。頂点 $(1,\ -1)$ は $(1,\ 1)$ に移り、山の高さは 1 である。



(2) $x^2 - 2x = k$ は判別式が $4(1 + k) > 0$ より、$k > 0$ のときつねに異なる 2 実数解をもつ（これらは $x < 0$ または $x > 2$ にある）。また $-(x^2 - 2x) = k$、すなわち $x^2 - 2x + k = 0$ の判別式は $4(1 - k)$ であるから、解の個数は $0 < k < 1$ で 2 個、$k = 1$ で 1 個、$k > 1$ で 0 個である。よって共有点の個

数は

$$0<k<1 \cdots \textbf{4 個}, \qquad k=1 \cdots \textbf{3 個}, \qquad k>1 \cdots \textbf{2 個}$$

(3)　(2) より $k=1$ のときの共有点の x 座標は $x=1-\sqrt{2},\ 1,\ 1+\sqrt{2}$ である。$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ では（$x=1$ を除いて）直線 $y=1$ が上にあるから、求める面積は

$$S=\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\left(1-\left|x^2-2x\right|\right)dx$$

グラフは直線 $x=1$ に関して対称であるから、$0 \leqq x \leqq 2$ の部分と $2 \leqq x \leqq 1+\sqrt{2}$ の部分の 2 倍に分けて計算する。

$0 \leqq x \leqq 2$ では $\left|x^2-2x\right|=2x-x^2$ であるから

$$\int_0^2\left\{1-\left(2x-x^2\right)\right\}dx=\int_0^2(x-1)^2dx=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$2 \leqq x \leqq 1+\sqrt{2}$ では $\left|x^2-2x\right|=x^2-2x$ であるから、$u=x-1$ とおくと

$$\int_2^{1+\sqrt{2}}\left\{1-\left(x^2-2x\right)\right\}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\left(2-u^2\right)du=\left[2u-\frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{3}$$

よって

$$S=\frac{2}{3}+2\cdot\frac{4\sqrt{2}-5}{3}=\frac{8\sqrt{2}-8}{3}=\frac{\boldsymbol{8\left(\sqrt{2}-1\right)}}{\boldsymbol{3}}$$

方針の候補

○ まず**グラフ**。折り返した**山の高さ**が場合分けの境目。 ▶ Point 6-2-9

○ 共有点の個数は**図と判別式の両方**で確認する。

○ 対称軸 $x=1$ を使って**片側を 2 倍**。 ▶ Point 6-2-16

△ $u=x-1$ とおかず、そのまま $\sqrt{2}$ を代入して計算する $\cdots$ うまくいく。ただし**置きかえたほうが軽い**。

× (2) で $k=1$ を 4 個とする $\cdots$ 山の頂点は 1 **個**に数える。3 個。

× (3) で絶対値の中身の根 $x=0,\ 2$ で切らない $\cdots$ **はずし方が変わる**。

× $\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}$ を間違える $\cdots$ $\sqrt{2}\cdot 2=2\sqrt{2}$。

この問題で身につくこと

・絶対値のグラフは**折り返し**。山の高さが場合分けの境目。
・共有点の個数は**図と判別式の両方**で確認する。
・山の頂点をかすめるときは 1 **個**に数える。
・面積では**中身の根で区間を切る**。
・$y=|f(x)|$ が対称なら**片側を求めて 2 倍**。
・$1-(2x-x^2)=(x-1)^2$ のような**完全平方**に気づくと計算が短く済む。
・$\sqrt{2}$ を含む代入は $u=x-1$ **とおく**と軽くなる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 6-2-9 $y = |f(x)|$ **のグラフ**
$y = f(x)$ の x 軸より下の部分を x 軸で折り返したもの。折り返してできる**山の高さ**が、水平線との共有点の個数の分かれ目になる。

Point 6-2-10 絶対値付き定積分
中身が 0 になる点で区間を分け、各区間で符号を調べてからはずす。

Point 6-2-16 求めやすい面積を用いよ！
対称性が使えるなら**半分だけ求めて 2 倍**する。