この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学II BC 第 4 章「指数関数・対数関数」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 1　次の (1)〜(4) を解け。さらに、**なぜ「底をそろえて中身を比べる」だけで解けるのか**を説明せよ。

(1) $4^x = 8$　　(2) $\log_2(x-1) = 3$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > 8$　　(4) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$　　(Point 4-1-2)

問 18　方程式 $\log_3(x-2) + \log_3(x-4) = 1$ を解け。**真数条件を最初に書くこと。**　　(Point 4-2-18)

問 24　$2^x + 2^{-x} = 3$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $4^x + 4^{-x}$　　(2) $8^x + 8^{-x}$　　(3) $2^x - 2^{-x}$　　(Point 4-2-22)

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 36　$x > 0$, $x \neq 1$ とし、$f(x) = \log_2 x + \log_x 16$ とする。

(1) $x > 1$ のときの $f(x)$ の最小値と、そのときの x を求めよ。

(2) $0 < x < 1$ のときの $f(x)$ の最大値と、そのときの x を求めよ。

(3) 方程式 $f(x) = 5$ を解け。　　(Point 4-2-24)

解説編（見本）

問 1

次の (1)〜(4) を解け。さらに、**なぜ「底をそろえて中身を比べる」だけで解けるのか**を説明せよ。

(1) $4^x = 8$　(2) $\log_2(x-1) = 3$　(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$　(4) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$

問題を見て思うこと

章のフロー：①底をそろえる → ②中身を比べる → ③条件 check。この問は 3 つとも使う。

▶ Point 4-1-2

→ (1) $4 = 2^2$、$8 = 2^3$ で底が 2 にそろう。→ $2^{2x} = 2^3$ より $x = \frac{3}{2}$。

→ (2) **先に真数条件** $x - 1 > 0$。→ $3 = \log_2 8$ とそろえて $x - 1 = 8$、$x = 9$（条件を満たす）。

→ (3) 底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さい。→ $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ として底 2 にそろえ、$2^{-x} > 2^3$。底 $2 > 1$ なので向きはそのまま、$x < -3$。

→ (4) 真数条件 $x > 0$。→ $2 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$ とそろえる。底 $\frac{1}{3} < 1$ なので**向きが逆転**して $x < \frac{1}{9}$。→ $0 < x < \frac{1}{9}$。

→「なぜ中身だけ比べてよいか」は、指数・対数関数が 1 **対** 1（つねに増加か、つねに減少）だから。$f(x) = x^2$ では $f(-3) = f(3)$ なので、同じことは言えない。

解答

(1)　$4 = 2^2$，$8 = 2^3$ より

$$2^{2x} = 2^3$$

底 2 の指数関数は 1 対 1 であるから $2x = 3$。よって

$$x = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2)　真数条件より $x - 1 > 0$、すなわち $x > 1$。

$$\log_2(x-1) = 3 = \log_2 8 \qquad \therefore \quad x - 1 = 8, \quad x = 9$$

これは $x > 1$ を満たすから

$$x = \boldsymbol{9}$$

(3)　$\frac{1}{2} = 2^{-1}$ より $2^{-x} > 2^3$。底 2 は 1 より大きく指数関数は増加するから

$$-x > 3 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x < -3}$$

(4)　真数条件より $x > 0$。また $2 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$ であるから

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さく対数関数は減少するから、**大小は逆転**して $x < \frac{1}{9}$。真数条件と合わせて

$$\boldsymbol{0 < x < \frac{1}{9}}$$

[なぜ中身だけ比べてよいか]　一般の関数 f では $f(p) = f(q)$ から $p = q$ は言えない。たとえば $f(x) = x^2$ では $f(-3) = f(3) = 9$ だが $-3 \neq 3$ である。

ところが指数関数 $y = a^x$、対数関数 $y = \log_a x$（$a > 0$, $a \neq 1$）は、グラフが**つねに増加かつねに減少のどちらか**であり、異なる値を入れれば必ず異なる値が出てくる。すなわち**入力と出力が 1 対 1 に対応**している。だからこそ

$$a^p = a^q \implies p = q, \qquad \log_a p = \log_a q \implies p = q$$

と**中身だけを取り出して比較**してよい。指数方程式・対数方程式が「底をそろえて中身を比べる」だけで解けるのは、この性質のおかげである。

方針の候補

○ **①底をそろえる** → **②中身を比べる** → **③条件 check**。この 3 段階。 ▶ **Point 4-1-2**

○ 対数では**最初に真数条件**を書く。あとで解を捨てる根拠になる。

○ 不等式では**底が 1 より大きいか小さいか**で向きが変わる。

△ (3) を $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ とそろえる … うまくいく。ただし底 < 1 なので**向きが逆転**する。**底を 1 より大きい数にそろえる**ほうが間違えにくい。

× 対数の真数条件を書かない … この章の失点の**最大の原因**。

× 底 < 1 の不等式で向きをそのままにする … (4) で $x > \frac{1}{9}$ としてしまう。**グラフが減少**であることを思い出す。

×「1 対 1 だから中身を比べてよい」の理由を書かずに使う … ふだんは書かなくてよいが、**なぜ成り立つかは知っておく**。

この問題で身につくこと

- この章の方針は**①底をそろえる** → **②中身を比べる** → **③条件 check**。
- 道具は少ない。**失点はほとんど③（条件の見落とし）**から出る。
- 対数では**真数は正、底は正で 1 でない**。最初に書き出す。
- 中身を比べてよい根拠は **1 対 1 の関数**であること。
- 一般の関数では言えない。$f(x) = x^2$ が反例。
- 不等式では**底が 1 より大きいか小さいか**で不等号の向きが変わる。
- 迷ったら**底を 1 より大きい数にそろえる**。向きを間違えにくい。
- 出た解が**条件を満たすか**を最後に確かめる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 4-1-2 指数・対数の方程式・不等式まとめ

$a > 0,\ a \neq 1$ のとき

$$a^p = a^q \iff p = q, \qquad \log_a p = \log_a q \iff p = q \quad (p > 0,\ q > 0)$$

（どちらも 1 **対** 1 **の関数**だから。）
不等式は**底が** 1 **より大きいか小さいか**で扱いが変わる。

$$a > 1: \quad a^{\bigcirc} > a^{\triangle} \iff \bigcirc > \triangle, \qquad \log_a \bigcirc > \log_a \triangle \iff \bigcirc > \triangle \quad (\text{大小一致})$$

$$0 < a < 1: \quad a^{\bigcirc} > a^{\triangle} \iff \bigcirc < \triangle, \qquad \log_a \bigcirc > \log_a \triangle \iff \bigcirc < \triangle \quad (\text{大小逆転})$$

問 18

方程式 $\log_3(x-2)+\log_3(x-4)=1$ を解け。**真数条件を最初に書くこと。**

問題を見て思うこと

真数に文字があるので、**まず真数条件**。この Point の名前そのもの。 ▶ Point 4-2-18

▶ Point 4-1-2

→ あとで解を捨てる根拠になるので最初に書く。真数は $x-2$ と $x-4$ で、**両方**正。→ 共通部分は $x>4$。

→ 左辺を $\log_3\{(x-2)(x-4)\}$ にまとめ、$1=\log_3 3$ から $(x-2)(x-4)=3$。→ $x^2-6x+5=0$、$x=1,\ 5$。→ $x>4$ より $x=5$。

→ $x=1$ は、真数が -1 と -3 で定義されない。ところが $(x-2)(x-4)=3$ は正。→ **まとめた式だけを見ると、不適な解を拾う。**

→ $\log M+\log N=\log MN$ は、$M>0$ かつ $N>0$ のとき成り立つ。$MN>0$ では足りない。

▶ Point 4-2-28

→ 検算。$x=5$ で $\log_3 3+\log_3 1=1+0=1$。

解答

真数条件より

$$x-2>0 \quad \text{かつ} \quad x-4>0 \qquad \therefore \quad x>4$$

このとき左辺をまとめて、$1=\log_3 3$ を用いると

$$\log_3\{(x-2)(x-4)\}=\log_3 3$$

真数を比べて

$$(x-2)(x-4)=3 \iff x^2-6x+5=0 \iff (x-1)(x-5)=0$$

よって $x=1,\ 5$。真数条件 $x>4$ より

$$x=\mathbf{5}$$

（$x=1$ のとき真数は -1 と -3 でどちらも負であり、もとの式は定義されない。積 $(x-2)(x-4)$ は $x=1$ でも 3 で正になるので、**まとめた式だけを見ると見落とす**。真数条件を最初に書く理由はここにある。）

（検算：$x=5$ のとき $\log_3 3+\log_3 1=1+0=1$。）

方針の候補

- ○ **真数条件を最初に書く**。複数あれば**共通部分**（厳しいほう）。 ▶ Point 4-2-18
- ○ まとめてから真数を比べ、最後に**条件でふるいにかける**。
- ○ $x=1$ が**まとめた式は満たすのに不適**であることを確かめる。 ▶ Point 4-2-28

△ 解いたあとで「もとの式に代入して確かめる」⋯ うまくいく。真数条件を書かなくても最後の検算で捨てられる。ただし**最初に書くほうが手間が少ない**。

× 真数条件を $x > 2$ とする ⋯ **両方**の真数が正。$x > 4$。

× 真数条件を書かずに $x = 1, 5$ の両方を答える ⋯ $x = 1$ では真数が負。**定義されない**。

×「$(x-2)(x-4) > 0$ だから $x < 2$ または $x > 4$」とする ⋯ **積が正では足りない**。それぞれが正。

この問題で身につくこと

・真数に文字ときたら**まず真数条件**。この Point の名前そのもの。
・真数が複数あれば**すべて正**。共通部分（厳しいほう）をとる。
・$\log M + \log N = \log MN$ **は** $M > 0$ **かつ** $N > 0$ のとき。
・$MN > 0$ **では足りない**。$M < 0$，$N < 0$ でも積は正になる。
・だから**まとめた式だけ見ると不適な解を拾う**。
・真数条件は**最初に書く**。あとで解を捨てる根拠になる。
・最後に**もとの式に代入**して確かめる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 4-2-18 真数に文字ありときたら
真数に文字があるときは、**まず真数条件（真数 > 0）**を書く。真数が複数あれば**すべてについて**書き、共通部分をとる。
とくに $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ を使うときは $M > 0$ **かつ** $N > 0$ が必要。$MN > 0$ だけでは不十分（$M < 0$，$N < 0$ の場合が混ざる）。

問 24

$2^x + 2^{-x} = 3$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $4^x + 4^{-x}$　(2) $8^x + 8^{-x}$　(3) $2^x - 2^{-x}$

問題を見て思うこと

2^x と 2^{-x} は**互いに逆数**。相反式の形。 ▶ Point 4-2-22　▶ Point 4-1-2

→ $u = 2^x$ とおくと $2^{-x} = \dfrac{1}{u}$。条件は $u + \dfrac{1}{u} = 3$（$u > 0$）。**かたまりで扱う**。

→ (1) $4^x + 4^{-x} = u^2 + \dfrac{1}{u^2} = \left(u + \dfrac{1}{u}\right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$。

→ (2) $u^3 + \dfrac{1}{u^3} = \left(u + \dfrac{1}{u}\right)^3 - 3\left(u + \dfrac{1}{u}\right) = 27 - 9 = 18$。積が 1 なので、$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ の ab が 1 になる。

→ (3) 差は**交代式**。2 乗して $\left(u - \dfrac{1}{u}\right)^2 = \left(u + \dfrac{1}{u}\right)^2 - 4 = 5$ より $\pm\sqrt{5}$。

→ 符号は決まるか。$u^2 - 3u + 1 = 0$ より $u = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$。どちらも正なので、どちらも 2^x として実現する。→ $u = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ なら $+\sqrt{5}$、$u = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ なら $-\sqrt{5}$。答えは**両方**。

解答

$u = 2^x$ とおくと $2^{-x} = \dfrac{1}{u}$ であり、条件は $u + \dfrac{1}{u} = 3$（$u > 0$）。

(1)

$$4^x + 4^{-x} = u^2 + \frac{1}{u^2} = \left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = \mathbf{7}$$

(2)

$$8^x + 8^{-x} = u^3 + \frac{1}{u^3} = \left(u + \frac{1}{u}\right)^3 - 3\left(u + \frac{1}{u}\right) = 27 - 9 = \mathbf{18}$$

(3)

$$\left(2^x - 2^{-x}\right)^2 = \left(u - \frac{1}{u}\right)^2 = \left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

よって $2^x - 2^{-x} = \pm\sqrt{5}$。

ここで $u + \dfrac{1}{u} = 3$ より $u^2 - 3u + 1 = 0$、すなわち $u = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$。$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$、$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$ はいずれも正であるから、$u = 2^x$ としてどちらも実現する（対応する x が存在する）。したがって

$$2^x - 2^{-x} = \mathbf{\pm\sqrt{5}}$$

（2 つの u は互いに逆数であり、x と $-x$ に対応している。）

方針の候補

○ 2^x と 2^{-x} は**互いに逆数**。相反式として**かたまりで扱う**。 ▶ Point 4-2-22

○ $u^2+\dfrac{1}{u^2}=t^2-2$、$u^3+\dfrac{1}{u^3}=t^3-3t$。**積が 1 だから手間が少ない**。

○ (3) は**交代式**。2 乗して対称式にし、最後に**符号を検討**する。

△ $u=2^x$ を実際に求めてから計算する $\cdots$ うまくいく。$u=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。ただし**かたまりで処理するほうが手間が少ない**。

× (1) を $3^2=9$ とする $\cdots$ 2 乗すると 2 が余分に出る。-2。

× (3) で $\sqrt{5}$ だけ答える $\cdots$ u は 2 通りあり、**どちらも実現する**。$\pm\sqrt{5}$。

× $4^x=2\cdot 2^x$ とする $\cdots$ $(2^x)^2$。

この問題で身につくこと

・a^x と a^{-x} は**互いに逆数**。相反式として**かたまりで扱う**。
・$t=u+\dfrac{1}{u}$ とすると $u^2+\dfrac{1}{u^2}=t^2-2$、$u^3+\dfrac{1}{u^3}=t^3-3t$。
・**積が** 1 なので対称式の計算の手間が少ない。
・第 1 章・第 3 章と**まったく同じ道具**。単元の壁を越えて使える。
・差は**交代式**。2 乗すると t^2-4。
・**符号は $\pm$ の両方を検討**する。u が 2 通りあれば両方が答え。
・$u>0$ を確かめる。2^x **は正**。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 4-2-22【復習】相反式は $x+\frac{1}{x}$ をかたまりで扱う！
$\bigcirc+\dfrac{1}{\bigcirc}$ の形（**相反式**）が現れたら、それ自体を 1 つの文字とみる。$t=u+\dfrac{1}{u}$ とすると

$$u^2+\frac{1}{u^2}=t^2-2,\qquad u^3+\frac{1}{u^3}=t^3-3t,\qquad \left(u-\frac{1}{u}\right)^2=t^2-4$$

Point 4-2-23 相反式と ○○ は相性がいい
a^x と a^{-x} は互いに逆数だから、**指数関数と相反式は相性がよい**。また $a^x>0$ なので**相加平均と相乗平均の関係**も使える。

問 36

$x>0,\ x\neq 1$ とし、$f(x)=\log_2 x+\log_x 16$ とする。
(1) $x>1$ のときの $f(x)$ の最小値と、そのときの x を求めよ。 (2) $0<x<1$ のときの $f(x)$ の最大値と、そのときの x を求めよ。 (3) 方程式 $f(x)=5$ を解け。

問題を見て思うこと

この章の総まとめ。**底の変換 ＋ 相反式 ＋ 相加相乗**。 ▶Point 4-2-13 ▶Point 4-1-2
→ $\log_x 16=\dfrac{\log_2 16}{\log_2 x}=\dfrac{4}{\log_2 x}$。$t=\log_2 x$ とおくと $f=t+\dfrac{4}{t}$（相反式）。▶Point 4-2-22 → $x\neq 1$ より $t\neq 0$。
→ (1) $x>1$ は $t>0$。積が 4（定数）なので、相加相乗で $t+\dfrac{4}{t}\geqq 4$。▶Point 4-2-24 → 等号は $t=2$、つまり $x=4$。
→ (2) $0<x<1$ は $t<0$。相加相乗は正の数が前提なので、$-t>0$ に直す。→ $f=-\left\{(-t)+\dfrac{4}{-t}\right\}\leqq -4$。等号は $t=-2$、つまり $x=\dfrac{1}{4}$。
→ (3) $t+\dfrac{4}{t}=5$。$t\neq 0$ なので t を掛けてよく、方程式なので向きの心配もない。→ $t^2-5t+4=0$ より $t=1,\ 4$。→ $x=2,\ 16$。
→ 検算。$x=2$ で $1+4=5$、$x=16$ で $4+1=5$、$x=\dfrac{1}{4}$ で $-2+(-2)=-4$。

解答

底の変換公式より $\log_x 16=\dfrac{\log_2 16}{\log_2 x}=\dfrac{4}{\log_2 x}$ であるから、$t=\log_2 x$ とおくと

$$f(x)=t+\frac{4}{t}$$

$x>0,\ x\neq 1$ より t は 0 以外の実数全体を動く。

(1) $x>1$ のとき $t=\log_2 x>0$。$t>0,\ \dfrac{4}{t}>0$ で積が 4（定数）であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$t+\frac{4}{t}\geqq 2\sqrt{4}=4$$

等号は $t=\dfrac{4}{t}$ すなわち $t=2$（$t>0$）のときで、$\log_2 x=2$ より $x=4$。よって

$$\text{最小値 } \mathbf{4} \qquad (x=\mathbf{4})$$

(2) $0<x<1$ のとき $t<0$。$-t>0$ であるから

$$f(x)=t+\frac{4}{t}=-\left\{(-t)+\frac{4}{-t}\right\}\leqq -2\sqrt{4}=-4$$

等号は $-t=\dfrac{4}{-t}$ すなわち $t=-2$（$t<0$）のときで、$\log_2 x=-2$ より $x=\dfrac{1}{4}$。よって

$$\text{最大値 } \mathbf{-4} \qquad \left(x=\mathbf{\frac{1}{4}}\right)$$

(3)　$t+\dfrac{4}{t}=5$ の両辺に $t\ (\neq 0)$ を掛けて

$$t^2-5t+4=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (t-1)(t-4)=0 \qquad \therefore\ \ t=1,\ 4$$

どちらも $t\neq 0$ を満たす。$\log_2 x=1$ より $x=2$、$\log_2 x=4$ より $x=16$。よって

$$x=\mathbf{2,\ 16}$$

（検算：$x=2$ で $\log_2 2+\log_2 16=1+4=5$。$x=16$ で $\log_2 16+\log_{16} 16=4+1=5$。また $x=\dfrac{1}{4}$ で $-2+(-2)=-4$。）

方針の候補

○ **底の変換**で $t=\log_2 x$ にそろえ、$f=t+\dfrac{4}{t}$ の形にする。 ▶ **Point 4-2-13**

○ x の範囲を t **の符号**に翻訳する。$x>1 \iff t>0$。

○ $t>0$ なら**相加相乗**。$t<0$ なら $-t>0$ **に直して**から。 ▶ **Point 4-2-24**

○ **等号成立条件**を書き、x に戻す。

△ (2) を「$t<0$ では $t+\dfrac{4}{t}\leqq -4$」と結果だけ述べる ⋯ 正しいが、$-t$ **に直す一手**を書くと説得力がある。

× $t<0$ でそのまま相加相乗を使う ⋯ 2 **数が正**が前提で、$t<0$ のままでは条件を満たさない。

× $t\neq 0$ を書かない ⋯ $x\neq 1$ から従う。**分母に来る**ので必須。

× (3) で t のまま答える ⋯ 聞かれているのは x。

この問題で身につくこと

・底が違えば**底の変換**でそろえる。$\log_x 16=\dfrac{4}{\log_2 x}$。
・$\log_2 x$ と $\log_x 2$ は**互いに逆数**。相反式が現れる。
・x の範囲を t **の符号**に翻訳する。$x>1 \iff t>0$、$0<x<1 \iff t<0$。
・$t>0$ **なら相加相乗**。最小値が出る。
・$t<0$ **なら** $-t>0$ **に直して**から。最大値になる（符号が反転）。
・**等号成立条件**を書き、x に戻す。
・$x\neq 1$ から $t\neq 0$。分母に来るので必須。
・この章の道具（底の変換・相反式・相加相乗）が 1 **問に集まっている**。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 4-2-13 底の変換公式
（本文は問 12 参照）
$\log_x a=\dfrac{\log_b a}{\log_b x}$。$\log_2 x$ と $\log_x 2$ は互いに逆数。

Point 4-2-24 相加平均と相乗平均の関係
（本文は問 25 参照）
$t>0$ なら $t+\dfrac{k}{t}\geqq 2\sqrt{k}$。$t<0$ **のときは** $-t>0$ **に直す**。

Point 4-2-22 相反式

（本文は問 24 参照）
$t+\dfrac{k}{t}$ の形。方程式なら**分母をはらって 2 次方程式**。