この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学II BC 第 3 章「三角関数」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 1　次の (1)〜(4) について、**角と種類のどちらがそろっていないか**を指摘し、**どの公式でそろえるか**を答えよ。さらに (1) は実際に解け（$0 \leqq \theta < 2\pi$）。

(1) $\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$

(2) $y = 2\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta$ の最大値を求めたい

(3) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ を 1 つの三角関数で表したい

(4) $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{3}$ のとき $\tan(\alpha+\beta)$ を求めたい　（Point 3-1-1）

問 15　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $2\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$ を解け。　（Point 3-5-1）

問 28　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とし、$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ とする。次を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$　　(3) $\sin\theta - \cos\theta$　（Point 3-7-3）

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 36　a を実数の定数とし、$0 \leqq \theta < 2\pi$ における方程式

$$\sin 2\theta = a(\sin\theta + \cos\theta)$$

を考える。$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおく。

(1) t のとりうる値の範囲を求め、t の値 1 つに対して θ が何個定まるかを分類せよ。

(2) $\sin 2\theta$ を t で表し、もとの方程式を t の方程式に直せ。

(3) もとの方程式の解の個数を a の値によって分類せよ。　（Point 3-7-3）

解説編（見本）

問 1

次の (1)〜(4) について、**角と種類のどちらがそろっていないか**を指摘し、**どの公式でそろえるか**を答えよ。さらに (1) は実際に解け（$0 \leqq \theta < 2\pi$）。

(1) $\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$　(2) $y = 2\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta$ の最大値　(3) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ を 1 つの三角関数で　(4) $\tan\alpha = \frac{1}{2}$，$\tan\beta = \frac{1}{3}$ のとき $\tan(\alpha+\beta)$

問題を見て思うこと

章のフロー：三角関数ときたら**「角」と「種類」を統一せよ**。 ▶Point 3-1-1

→「角」は θ，2θ，$\theta + \frac{\pi}{3}$ など**カッコの中身**。「種類」は sin，cos，tan。そろうと**ただの 2 次方程式・2 次関数**になる。

→ (1) 角が 2θ と θ でバラバラ、種類は cos のみ。→ 2 倍角で $\cos 2\theta$ をくずす。▶Point 3-6-2 → **残したい種類で形を選ぶ**。cos に統一したいので $2\cos^2\theta - 1$。

→ $\cos\theta = c$ とおくと $2c^2 - 3c + 1 = 0$。→ **おきかえたら範囲 check**。 ▶Point 3-5-3

→ (2) 角は θ でそろい、種類が sin と cos でバラバラ。しかも 2 次同次式。→ 2 **倍角で次数を下げる**と $\sin 2\theta + \cos 2\theta + 1$。 ▶Point 3-6-4 → あとは**合成**。 ▶Point 3-6-7

→ (3) 種類がバラバラ。→ **合成**そのもの。→ (4) 角が α，β，$\alpha+\beta$ でバラバラ。→ **加法定理**。 ▶Point 3-6-1

解答

(1)　角が 2θ と θ でそろっていない（種類は cos でそろっている）。そこで 2 **倍角**で $\cos 2\theta$ をくずす。cos に統一したいので $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を選ぶ。

$$2\cos^2\theta - 1 - 3\cos\theta + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$$

$\cos\theta = c$ とおくと $-1 \leqq c \leqq 1$ であり

$$2c^2 - 3c + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2c-1)(c-1) = 0 \qquad \therefore \quad c = \frac{1}{2},\ 1$$

どちらも $-1 \leqq c \leqq 1$ を満たす。$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi, \qquad \cos\theta = 1 \implies \theta = 0$$

よって

$$\theta = \mathbf{0},\ \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$$

(2)　種類が sin と cos でそろっておらず、しかも 2 次。2 **倍角（次数下げ）**で 1 次にし、そのあと**合成**する。

$$2\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = \sin 2\theta + (1 + \cos 2\theta) = \sqrt{2}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

よって最大値は $\sqrt{2}+1$。

(3)　種類がそろっていない。**合成**を使う。

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\mathbf{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$$

(4)　角が α，β，$\alpha+\beta$ でそろっていない。**加法定理**を使う。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=\mathbf{1}$$

方針の候補

○ まず**角と種類のどちらがそろっていないか**を見る。それで使う公式が決まる。 ▶Point 3-1-1

○ (1) は 2 倍角。**残したい種類に合わせて 3 つの形から選ぶ**。 ▶Point 3-6-2

○ (2) は 2 次同次式なので**次数下げ**してから合成。 ▶Point 3-6-4

○ おきかえたら**値域を check** する。$-1\leqq\cos\theta\leqq1$。 ▶Point 3-5-3

△ (1) で $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ を選ぶ … sin と cos が混ざって**かえって悪化**する。形の選択に意味がある。

× (1) を $\cos2\theta=2\cos\theta$ とする … **2 倍角は 2 倍ではない**。$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$。

× おきかえた文字の範囲を調べない … $|c|>1$ の解が出たら**捨てなければならない**。今回は両方使えるが、習慣にする。

× θ に戻し忘れる … 聞かれているのは θ。c で終わらない。

この問題で身につくこと

・三角関数のコツは**「角」と「種類」を統一せよ**。この章はこの一言。
・そろった瞬間に**ただの 2 次方程式**・**2 次関数**に化ける。
・**角がバラバラ**なら加法定理・2 倍角・半角・変換公式。
・**種類がバラバラ**なら相互関係・合成。
・2 倍角の cos には 3 つの形がある。**残したい種類で選ぶ**。
・2 次同次式（$\sin^2$，$\sin\cos$，$\cos^2$）は**次数下げ**して角を 2θ にそろえる。
・おきかえたら**値域を check**。$-1\leqq\sin\theta\leqq1$。
・最後は θ **に戻す**。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 3-1-1【重要】三角関数のコツは
三角関数ときたら →**「角」と「種類」を統一せよ！**
- **角**（θ，2θ，$\theta+\alpha$ など）がバラバラ $\Longrightarrow$ 加法定理・2 倍角・半角・3 倍角・変換公式
- **種類**（sin，cos，tan）がバラバラ $\Longrightarrow$ 相互関係・合成

そろえた瞬間に、ただの 2 次方程式・2 次関数に変わる。

Point 3-1-2 三角関数の基本公式
式処理はほぼすべてこの 2 つから始まる。

相互関係：$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$、$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$
加法定理：$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ など
2 倍角・半角・3 倍角・合成は**すべて加法定理から導かれる**。

問 15

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $2\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$ を解け。

問題を見て思うこと

章のフロー：STEP1 θ の範囲 → **STEP2 かたまりの範囲** → STEP3 単位円。ここは STEP2 が要。 ▶Point 3-5-1

▶Point 3-1-1 → 解くのは θ ではなく**かたまり** $X = 2\theta + \dfrac{\pi}{3}$。→ $0 \leqq \theta < 2\pi$ から $\dfrac{\pi}{3} \leqq X < \dfrac{13}{3}\pi$。幅は 4π で、**約 2 周分**。解は複数出そう。

→ STEP3：$\cos X = \dfrac{1}{2}$ は、単位円で x 座標が $\dfrac{1}{2}$ の点。→ $X = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ から**範囲の中のものを拾う**。端点 $\dfrac{13}{3}\pi$ は含まれない。

→ 最後に θ に戻す。検算は 1 つ代入する。

解答

$X = 2\theta + \dfrac{\pi}{3}$ とおく。

STEP1　$0 \leqq \theta < 2\pi$。

STEP2　X の範囲を求める。

$$0 \leqq \theta < 2\pi \iff 0 \leqq 2\theta < 4\pi \iff \frac{\pi}{3} \leqq X < \frac{13}{3}\pi$$

STEP3　方程式は $\cos X = \dfrac{1}{2}$。単位円で x 座標が $\dfrac{1}{2}$ となるのは $X = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ のときであるから、$\dfrac{\pi}{3} \leqq X < \dfrac{13}{3}\pi$ の範囲では

$$X = \frac{\pi}{3},\quad \frac{5}{3}\pi,\quad \frac{7}{3}\pi,\quad \frac{11}{3}\pi$$

$\theta = \dfrac{1}{2}\left(X - \dfrac{\pi}{3}\right)$ に戻して

$$\theta = \mathbf{0},\ \mathbf{\frac{2}{3}\pi},\ \mathbf{\pi},\ \mathbf{\frac{5}{3}\pi}$$

（検算：$\theta = 0$ で $2\cos\dfrac{\pi}{3} = 1$、$\theta = \pi$ で $2\cos\dfrac{7}{3}\pi = 2\cos\dfrac{\pi}{3} = 1$。いずれも成り立つ。）

方針の候補

○ **STEP1 θ の範囲 → STEP2 かたまりの範囲 → STEP3 単位円**の順。 ▶Point 3-5-1

○ STEP2 で**範囲の幅**（ここでは 4π、約 2 周分）を意識すると解の個数の見当がつく。

○ 端点が**含まれるか**（$\leqq$ か $<$ か）を丁寧に扱う。

△ cos の 2 倍角で展開してから解く … $2\theta + \dfrac{\pi}{3}$ を加法定理でくずすと $\sin, \cos$ が混ざって**かえって難しくなる**。かたまりのまま扱う。

× STEP2 を飛ばして θ の範囲のまま解く ··· **解を落とす**最頻出のミス。ここでは 4 個のうち 2 個しか出ない。

× X のまま答える ··· 聞かれているのは θ。**戻す**。

× 範囲の端 $\dfrac{13}{3}\pi$ を含めてしまう ··· $\theta < 2\pi$ なので $X < \dfrac{13}{3}\pi$。等号なし。

この問題で身につくこと

・三角方程式は **STEP1 θ の範囲 → STEP2 かたまりの範囲 → STEP3 単位円**。
・**解くのは θ ではなくかたまり**。この意識が要。
・**STEP2 を飛ばすと解を落とす**。最頻出のミス。
・かたまりの範囲の**幅**を見ると解の個数の見当がつく。4π なら約 2 周分。
・$\cos X = k$ は単位円の x **座標**、$\sin X = k$ は y **座標**。
・端点が**含まれるか**を丁寧に。$\leqq$ と $<$ を見る。
・最後に θ **に戻す**。そして 1 つ代入して検算。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 3-5-1 方程式・不等式，最大・最小問題の解き方

- **STEP 1**：θ の範囲 check!!
- **STEP 2**：**位相部分（かたまり）の範囲 check!!**
- **STEP 3**：$\sin\square \gtreqless k$ などの形に変形し、**単位円を描いて**求める

$\sin\theta$ は単位円の y 座標、$\cos\theta$ は x 座標、$\tan\theta$ は動径を含む直線と $x = 1$ の交点の y 座標に現れる。

問 28

$0 \leqq \theta < 2\pi$ とし、$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ とする。次を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$　(3) $\sin\theta - \cos\theta$

問題を見て思うこと

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の**対称式**。→ 第 1 章の対称式と同じ発想。 ▶Point 3-7-2 → 基本対称式は和と積。しかも $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ があるので、**和が分かれば積も分かる**。 ▶Point 3-7-3 ▶Point 3-1-1

→ (1) 和を 2 乗する。→ $1 + 2\sin\theta\cos\theta$ と、1 が出てくる。

→ (2) 3 乗の和は $(a+b)^3 - 3ab(a+b)$ で、和と積に直せる。

→ (3) 差は対称式ではなく**交代式**。 ▶Point 3-7-4 → 2 乗すれば対称式になる。

→ 2 乗して求めたら、**符号が決まるか**を検討する。→ $\sin\theta$, $\cos\theta$ は、和と積が分かる 2 数なので t の 2 次方程式の 2 解。値が -1 以上 1 以下に入るかを見る。決まらないなら両方が答え。

解答

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4} \qquad \therefore \quad \sin\theta\cos\theta = \boldsymbol{-\frac{3}{8}}$$

(2)　$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ より

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{9}{16} = \boldsymbol{\frac{11}{16}}$$

(3)

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

よって $\sin\theta - \cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$。

ここで、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は和が $\dfrac{1}{2}$、積が $-\dfrac{3}{8}$ の 2 数であるから、t の 2 次方程式

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{8} = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$$

の 2 解である。$\dfrac{1+\sqrt{7}}{4} \approx 0.911$、$\dfrac{1-\sqrt{7}}{4} \approx -0.411$ はいずれも -1 以上 1 以下であるから、$(\sin\theta, \cos\theta)$ はどちらの組み合わせも起こりうる。したがって

$$\sin\theta - \cos\theta = \boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

方針の候補

○ $\sin\theta+\cos\theta$ を 2 **乗**して $\sin^2+\cos^2=1$ を使い、積を求める。 ▶ **Point 3-7-3**

○ 3 乗の和は $(a+b)^3-3ab(a+b)$。和と積で書ける。 ▶ **Point 3-7-2**

○ (3) は**交代式**。2 乗すれば対称式になる。 ▶ **Point 3-7-4**

○ 2 乗して求めたら**符号が決まるか検討**する。ここでは両方ありうる。

△ (3) を θ の範囲から象限を絞って符号を決めようとする … 本問では θ の範囲が $0 \leqq \theta < 2\pi$ と広いので**絞りきれない**。2 数の組み合わせで考える。

× (1) で $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ とする … **交差項** $2\sin\theta\cos\theta$ を落としている。

× (3) で $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ だけ答える … 符号が決まる根拠がない。$\pm$ **の両方**。

× (2) で $a^3+b^3=(a+b)^3$ とする … $-3ab(a+b)$ が必要。

この問題で身につくこと

・$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の**対称式**は、和と積で書ける。第 1 章と同じ発想。
・三角関数では $\sin^2+\cos^2=1$ があるので、**和が分かれば積も分かる**。
・$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$。1 **が出る**のが要点。
・$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$。
・差は**交代式**。2 乗すれば対称式（$1-2\sin\theta\cos\theta$）。
・2 乗して求めたら**符号が決まるか検討**する。
・$\sin\theta$，$\cos\theta$ は t^2-(**和**)$t+$(**積**)$=0$ **の** 2 **解**。値が $[-1,1]$ に入るかも見る。
・積が負なら sin **と** cos **は異符号**。第 2 か第 4 象限。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 3-7-2 対称式
x，y を入れかえても変わらない式を**対称式**という。対称式は**基本対称式**（和 $x+y$、積 xy）で表せる。

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy,\qquad x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

Point 3-7-3 三角関数の対称式
$\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ が基本対称式。$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ があるので

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$

すなわち**一方が分かれば他方も分かる**。$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$。

Point 3-7-4 三角関数の交代式
$\sin\theta-\cos\theta$ は対称式ではないが、2 **乗すると**

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$$

となり対称式になる。求めたあと**符号の検討**を忘れない。

問 36

a を実数の定数とし、$0 \leqq \theta < 2\pi$ における方程式 $\sin 2\theta = a(\sin\theta + \cos\theta)$ を考える。$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおく。
(1) t のとりうる値の範囲を求め、t の値 1 つに対して θ が何個定まるかを分類せよ。 (2) $\sin 2\theta$ を t で表し、もとの方程式を t の方程式に直せ。 (3) もとの方程式の解の個数を a の値によって分類せよ。

問題を見て思うこと

$\sin 2\theta$ と $\sin\theta + \cos\theta$ が混ざった方程式。 ▶Point 3-7-3 ▶Point 3-5-3 → $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ に気づけば対称式の形。$t = \sin\theta + \cos\theta$ でおきかえる。 ▶Point 3-1-1
→ (1) 合成して範囲を出す。 ▶Point 3-6-7 → 本問の心臓は、**t の値 1 つに対して θ が何個か**。$X = \theta + \dfrac{\pi}{4}$ が 1 周を動くとき、$\sin X = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ を満たす X の数を数える。端の $t = \pm\sqrt{2}$ だけ 1 個になる。
→ (2) $t^2 = 1 + \sin 2\theta$ から、t の 2 次方程式になる。
→ (3) 判別式はつねに正。**解の積が** -1 なので、正の解と負の解が 1 つずつ。→ 正の解は a について単調増加なので、境界の a が決まる。→ それぞれの解が $-\sqrt{2}$ から $\sqrt{2}$ に入るかで、個数を数える。
→ 検算は、$a = 0$ で直接数える。

解答

(1)　合成すると $t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$。$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$（幅 2π の 1 周分）であるから

$$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$$

また $X = \theta + \dfrac{\pi}{4}$ が 1 周を動くとき、$\sin X = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ を満たす X の個数は
$-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ のとき **2** 個　　$t = \pm\sqrt{2}$ のとき **1** 個　　$|t| > \sqrt{2}$ のとき 0 個

(2)　$t^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \sin 2\theta$ であるから

$$\sin 2\theta = t^2 - 1$$

よってもとの方程式は

$$t^2 - 1 = at \qquad \therefore\ \boldsymbol{t^2 - at - 1 = 0}$$

(3)　$t^2 - at - 1 = 0$ の判別式は $a^2 + 4 > 0$ であるから、t の異なる 2 実数解

$$t_{\pm} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

をもつ。解と係数の関係より $t_+ t_- = -1 < 0$ であるから、$t_+ > 0 > t_-$ である。また t_+ は a について単調に増加する。

$t_+=\sqrt{2}$ となるのは $a+\sqrt{a^2+4}=2\sqrt{2}$、すなわち $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき。同様に $t_-=-\sqrt{2}$（$\Longleftrightarrow$ $t_+=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$）となるのは $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき。

(1) の個数分類と合わせると

(i) $a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$t_+>\sqrt{2}$（0 個）、$-\sqrt{2}<t_-<0$（2 個）$\Longrightarrow$ **2 個**

(ii) $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$t_+=\sqrt{2}$（1 個）、$t_-=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（2 個）$\Longrightarrow$ **3 個**

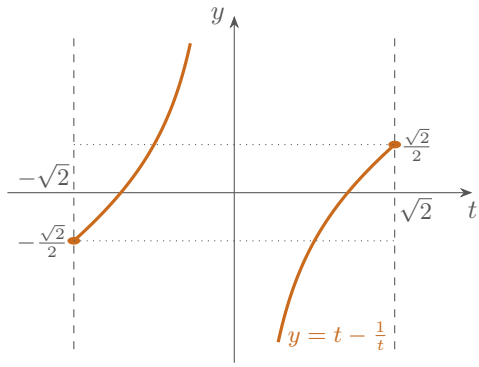
(iii) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　t_+, t_- とも $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ の内部（各 2 個）$\Longrightarrow$ **4 個**

(iv) $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$t_-=-\sqrt{2}$（1 個）、$t_+=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（2 個）$\Longrightarrow$ **3 個**

(v) $a<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$t_-<-\sqrt{2}$（0 個）、$0<t_+<\sqrt{2}$（2 個）$\Longrightarrow$ **2 個**

まとめると、$|a|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき 4 個、$|a|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき 3 個、$|a|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき 2 個。

（図で見ると：$t=0$ は $t^2-at-1=0$ を満たさないので $a=t-\dfrac{1}{t}$ と書ける。この曲線と直線 $y=a$ の共有点の t を読み、端の $t=\pm\sqrt{2}$ からは 1 個、内側からは 2 個と数える。）



（検算：$a=0$ のとき方程式は $\sin 2\theta=0$ で、$0\leqq 2\theta<4\pi$ より $2\theta=0,\pi,2\pi,3\pi$、すなわち $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3}{2}\pi$ の 4 個。$|0|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と合う。）

方針の候補

○ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ に気づき、$t=\sin\theta+\cos\theta$ **でおきかえる**。 ▶Point 3-7-3

○ (1) で**範囲だけでなく「戻る個数」**まで分類する。ここが (3) の土台。 ▶Point 3-5-3

○ $t^2-at-1=0$ は**積が** -1 なので、2 解は正と負に 1 つずつ。強い情報。

○ t_+ が a について**単調増加**であることを使って境界を求める。

△ t の 2 次方程式を解の配置（判別式・端点の値・軸）で処理する … うまくいく。$g(t)=t^2-at-1$ とおくと $g(\pm\sqrt{2})$ の符号で判定できる。$g(\sqrt{2})=1-\sqrt{2}a$、$g(-\sqrt{2})=1+\sqrt{2}a$。**こちらのほうが計算は軽い**。

× (1) の個数分類を飛ばす … t の個数と θ の個数は違う。**ここが本体**。

× $t=\pm\sqrt{2}$ からも θ が 2 個出るとする ･･･ $\sin X=\pm1$ は 1 周に 1 回。1 **個**。

× 判別式を調べて「実数解をもつ」で終える ･･･ 必要なのは**解が範囲に入るか**。

この問題で身につくこと

・$\sin 2\theta$ と $\sin\theta+\cos\theta$ が混ざったら $t=\sin\theta+\cos\theta$。
・$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$。**対称式の形**に気づく。
・おきかえたら**範囲だけでなく「戻る個数」**も分類する。
・$t=\pm\sqrt{2}$ からは θ が 1 **個**、$|t|<\sqrt{2}$ からは 2 個。
・**解の積が負**なら 2 解は正と負に 1 つずつ。強い情報。
・t_+ が a について単調増加なので、**境界の a が一意に決まる**。
・$g(t)=t^2-at-1$ とおいて $g(\pm\sqrt{2})$ **の符号**で判定する道もある。
・最後に $a=0$ **などで直接数えて**検算する。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 3-7-3 三角関数の対称式
（本文は問 28 参照）
$t=\sin\theta+\cos\theta$ のとき $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$、$\sin 2\theta=t^2-1$。

Point 3-5-3 おきかえたら範囲 check!!
（本文は問 18 参照）
解の個数問題では**「おきかえた文字の解の個数」×「そこから戻る個数」**を数える。

Point 3-6-7 三角関数の合成
（本文は問 25 参照）
t の範囲は合成して求める。$-\sqrt{2}\leqq\sin\theta+\cos\theta\leqq\sqrt{2}$。