この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学II BC 第 2 章「図形と方程式」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 1　AB = AC である二等辺三角形 ABC において、辺 BC の中点を M とする。このとき AM ⊥ BC であることを、**①幾何（合同）**と**②座標設定**の 2 通りで示し、2 **つの解法を比較せよ**。　（Point 2-2-1）

問 12　△ABC において、辺 BC の中点を M とするとき

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$$

が成り立つ（中線定理）。これを**座標設定**によって証明せよ。**どう座標を取ると軽くなるか**も述べること。　（Point 2-3-11）

問 25　2 点 A$(2,\ 4)$，B$(3,\ -1)$ と直線 $\ell:\ y=ax+1$ がある。$f(x,y)=ax-y+1$ とおく。

(1) 2 点 A，B が直線 ℓ をはさんで反対側にあるための条件が $f(2,4)\cdot f(3,-1)<0$ で表される理由を説明せよ。

(2) 線分 AB と直線 ℓ が共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。　（Point 2-5-4）

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 32　円 $C:x^2+y^2=25$ と点 A$(1,2)$ について、A を通る C の弦を考える。

(1) 弦の中点 M の軌跡を求めよ。

(2) 弦の長さが最小になるときの弦の長さを求めよ。

(3) (2) のときの弦を含む直線の方程式を求めよ。　（Point 2-4-5）

解説編（見本）

問 1

AB = AC である二等辺三角形 ABC において、辺 BC の中点を M とする。このとき AM ⊥ BC であることを、**①幾何（合同）**と**②座標設定**の 2 通りで示し、2 つの解法を比較せよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①図を描く → ②特徴をつかむ → ③ 4 **つの解法から選ぶ**。この問は③の練習。 **▶Point 2-2-1**

→ 図を描くと、二等辺三角形が左右対称に見える。→ 合同な 2 つの三角形に分けられそう。→ △ABM ≡ △ACM（3 辺相等）から ∠AMB = ∠AMC、その和が 180° なので 90°。計算は要らない。

→ 座標設定は、対称性を生かして M を原点、BC を x 軸に置く。 **▶Point 2-3-11** → B$(-a, 0)$，C$(a, 0)$，A(p, q) とおき、$\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 = 4ap = 0$ から $p = 0$。

→ 幾何は合同が見えれば短いが、見えないと手が止まる。座標は発想が要らず、手順どおりに計算すれば結論に着く。 **▶Point 2-2-2** → まず幾何を少し考え、見えなければ座標に切りかえる。

解答

[解法 1：幾何]　△ABM と △ACM において

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}, \qquad \mathrm{BM} = \mathrm{CM}\ (\mathrm{M}\text{ は中点}), \qquad \mathrm{AM}\text{ は共通}$$

であるから、3 辺がそれぞれ等しく △ABM ≡ △ACM。よって

$$\angle \mathrm{AMB} = \angle \mathrm{AMC}$$

一方、B，M，C は一直線上にあるから ∠AMB + ∠AMC = 180°。したがって

$$\angle \mathrm{AMB} = \angle \mathrm{AMC} = 90^\circ \qquad \therefore \quad \mathrm{AM} \perp \mathrm{BC}$$

[解法 2：座標設定]　M を原点、直線 BC を x 軸にとると、M は BC の中点であるから

$$\mathrm{B}(-a, 0), \qquad \mathrm{C}(a, 0) \qquad (a > 0)$$

とおける。A(p, q)（$q \neq 0$）とすると

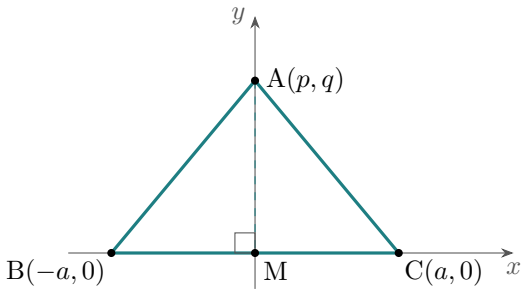
$$\mathrm{AB}^2 = (p + a)^2 + q^2, \qquad \mathrm{AC}^2 = (p - a)^2 + q^2$$

AB = AC より $\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 = 0$ であるから

$$(p + a)^2 - (p - a)^2 = 4ap = 0$$

$a > 0$ より $p = 0$。よって A$(0, q)$ であり、直線 AM は y 軸、直線 BC は x 軸であるから

$$\mathrm{AM} \perp \mathrm{BC}$$



M を原点、BC を x 軸にとるのが**賢い置き方**。条件 AB = AC から $p = 0$ が出る。

[2 **解法の比較**]　この問題では**幾何のほうが軽い**。合同が見えれば計算はひとつも要らない。一方、座標設定は**発想が要らず、手順どおり計算すれば着く**のが強みで、幾何のひらめきが出ないときの保険になる。一般には、**長さの関係式が与えられている問題、直角が多い問題、中点や重心が主役の問題**では座標が有力で、**角度・相似・円周角が主役の問題**では幾何が有力である。**まず幾何を少し考え、見通しが立たなければ座標に切りかえる**のがこの章の作法。

方針の候補

○ まず図を描き、**対称性という特徴**をつかむ。そのうえで幾何（3 辺相等の合同）で処理する。 ▶ Point 2-2-1

○ 座標設定では M **を原点、**BC **を** x **軸**に取る。対称性がそのまま座標に反映される。 ▶ Point 2-3-11

△ ベクトルで示す ··· うまくいく。$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2} = 0$。1 **行で終わる**ほど強力。空間に拡張しやすいのも利点。

△ 座標を $\mathrm{B}(0,0)$, $\mathrm{C}(c,0)$ と取る ··· うまくいくが、中点が $\left(\dfrac{c}{2},0\right)$ となって分数が出る。**対称に取ったほうが軽い**。

× 座標を $\mathrm{A}(0,h)$, $\mathrm{B}(-a,0)$, $\mathrm{C}(a,0)$ と**最初から** y **軸上に置く** ··· それは示したいことを仮定している。A **は** (p,q) **とおいて** $p=0$ **を導く**。

×「図を見れば明らか」で済ませる ··· 図は方針を立てる道具であって、**証明の根拠にはならない**。

× $\angle\mathrm{AMB} = \angle\mathrm{AMC}$ から直ちに 90° とする ··· 2 **角の和が** 180° であることを述べて初めて 90°。

この問題で身につくこと

- 図形問題は**まず図をきれいに描く**。図から特徴をつかむのが解法選択の出発点。
- 武器は**幾何・座標設定・ベクトル・複素数平面**の 4 つ。
- **まず幾何**。当たれば計算がほとんど要らない。
- 見通しが立たなければ**座標に切りかえる**。座標は遅いが止まらない。
- 座標設定では**どこを原点にするか**で手間が何倍も変わる。対称性を座標に生かす。
- **示したいことを座標の置き方に仕込まない**。A は (p,q) とおいて $p=0$ を導く。
- 「図を見れば明らか」は証明ではない。**図は方針、答案は論理**。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 2-2-1【重要】図形問題ときたら

まず**図をきれいに描く**。図から図形の特徴をつかむことが解法選択の出発点。使える解法は 4 つ。

1. **幾何**（三角比・相似合同・図形の性質）
2. **座標設定**（図形と方程式へ）
3. **ベクトル**（とくに空間に強い）
4. **複素数平面**（回転がらみ）

まず①幾何を考え、見通しが立たなければ②〜④へ。

Point 2-2-2 4 つの解法の特徴と使い分け

幾何は発想が要るが、ハマれば計算量が一気に減る。場合分けの漏れに注意。

座標設定は計算量が多くなりがちだが、**図に頼らず計算だけで押し切れる**。直角の多い図形、長さの関係式が与えられた問題で有力。

ベクトルは空間図形で標準的。**複素数平面**は回転がらみ。

問 12

△ABC において、辺 BC の中点を M とするとき $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$（中線定理）が成り立つ。これを**座標設定**によって証明せよ。どう座標を取ると軽くなるかも述べること。

問題を見て思うこと

章のフロー：①図を描く → **②特徴をつかむ** → ③解法を選ぶ。式に出てくるのは中点 M と長さだけで、角度は出てこない。 ▶Point 2-2-1

→ 長さ（の 2 乗）だけの式は、三平方の定理で全部書ける座標が向いている。座標の取り方が主題。 ▶Point 2-3-11

→ 原点は、式にいちばん多く出る点。M を原点、BC を x 軸にして $\mathrm{B}(-a,0)$, $\mathrm{C}(a,0)$, $\mathrm{A}(p,q)$ とおく。文字は a, p, q の 3 個。三角形は平行移動と回転でこの位置に置けるので、一般性は失われない。

→ $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=(p+a)^2+(p-a)^2+2q^2=2p^2+2a^2+2q^2$。交差項 $2ap$ が消える。右辺 $2(p^2+q^2+a^2)$ と一致する。

→ $\mathrm{B}(0,0)$, $\mathrm{C}(c,0)$ と取ると $\mathrm{M}\left(\dfrac{c}{2},0\right)$ となり、分数が入って手間が増える。中点が主役なら中点を原点に、対称に置けるなら対称に置く。

解答

三角形は平行移動と回転によって位置を自由に変えられ、長さは変わらないから、

$$\text{M を原点、直線 BC を } x \text{ 軸}$$

としてよい。M は BC の中点であるから、$a>0$ として

$$\mathrm{B}(-a,\ 0),\qquad \mathrm{C}(a,\ 0),\qquad \mathrm{A}(p,\ q)\ (q\neq 0)$$

とおける。このとき

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\left\{(p+a)^2+q^2\right\}+\left\{(p-a)^2+q^2\right\}=2p^2+2a^2+2q^2$$

一方

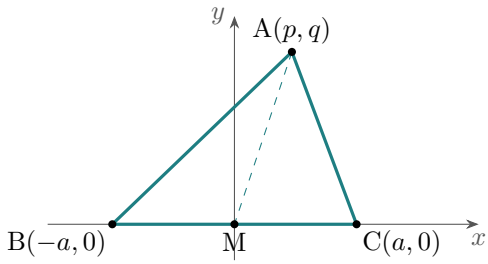
$$\mathrm{AM}^2=p^2+q^2,\qquad \mathrm{BM}^2=a^2$$

であるから

$$2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)=2\left(p^2+q^2+a^2\right)=2p^2+2a^2+2q^2$$

両者は一致するから、$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$ が成り立つ。　■

[座標の取り方について]　式に現れるのは**長さの 2 乗だけ**で角度が出てこないから、座標設定と相性がよい。さらに**中点 M が 3 回登場する**ので M を原点にとり、BC を x 軸にとると B, C が $\pm a$ と対称に置けて文字が 1 個で済む。この置き方のおかげで $(p+a)^2+(p-a)^2$ の**交差項が打ち消し合い**、計算が 3 行で終わる。仮に $\mathrm{B}(0,0)$, $\mathrm{C}(c,0)$ と置くと $\mathrm{M}\left(\dfrac{c}{2},0\right)$ となって分数が全体に入り、手間がおよそ倍になる。



中点を原点、その辺を x 軸に。B，C が $\pm a$ と対称になり、文字が 1 個で済む。

方針の候補

○ M **を原点、**BC **を** x **軸にとり、**$\mathrm{B}(-a,0)$，$\mathrm{C}(a,0)$，$\mathrm{A}(p,q)$。文字が最小になる。 ▶ Point 2-3-11

○ **一般性を失わない理由**（平行移動と回転でこの形にできる）を一言書く。

○ 長さは 2 乗のまま扱う。**根号を持ち歩かない。**

△ $\mathrm{B}(0,0)$，$\mathrm{C}(c,0)$，$\mathrm{A}(p,q)$ と取る ··· うまくいく。ただし $\mathrm{M}\left(\dfrac{c}{2},0\right)$ となって分数が全体に入り、**手間がおよそ倍**になる。

△ ベクトルで示す ··· うまくいく。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ の両辺を 2 乗すれば出る。**中線定理はベクトルとも相性がよい。**

△ 余弦定理を 2 回使う ··· うまくいく。$\angle\mathrm{AMB}$ と $\angle\mathrm{AMC}$ が補角であることから cos が打ち消し合う。**幾何の道。**

× 座標を取ったあとに「一般性を失わない」の断りを書かない ··· 特別な位置に置いているので、**ひとこと必要。**

× A を y 軸上に置く ··· それは二等辺三角形に限定してしまう。A **は** (p,q) **と自由に。**

この問題で身につくこと

- **長さ（の 2 乗）だけの命題**は座標と相性がよい。角度が主役なら幾何を考える。
- 座標設定は**どこを原点にするか**で手間が何倍も変わる。
- **式に多く登場する点を原点**に。ここでは中点 M。
- **対称に置けるなら対称に。**$\pm a$ と置くと交差項が打ち消し合う。
- 直角があれば**直角の頂点を原点、2 辺を軸**に。
- 「**一般性を失わない**」の断りを一言書く。平行移動と回転で移せるから。
- 示したいことを**座標の置き方に仕込まない。**A は (p,q) と自由に取る。
- 長さは 2 **乗のまま**扱う。根号を持ち歩かない。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 2-3-11 座標設定ときたら

図形の問題を座標で処理すると決めたら、**賢い置き方**を選ぶ。

1. **直角**があれば、その頂点を原点、2 辺を x 軸・y 軸に。
2. **中点・重心**が主役なら、それを原点に。

3. **対称性**があれば、$\pm a$ のように対称に置く。
4. 1 辺を x 軸にのせると、その辺上の点の y 座標が 0 になる。

置いたら「**一般性を失わない**」の断りを書く。また、**示したいことを置き方に仕込まない**こと。

問 25

2 点 A$(2,\ 4)$，B$(3,\ -1)$ と直線 $\ell:\ y=ax+1$ がある。$f(x,y)=ax-y+1$ とおく。
(1) 2 点 A，B が直線 ℓ をはさんで反対側にあるための条件が $f(2,4)\cdot f(3,-1)<0$ で表される理由を説明せよ。
(2) 線分 AB と直線 ℓ が共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

問題を見て思うこと

「直線をはさんで反対側」は、**正領域・負領域**の考え方。　▶Point 2-5-4
→ f は x，y の 1 次式で、直線 $f=0$ をまたぐときにだけ符号が変わる。→ (1) 2 点が反対側にある $\iff$ f の符号が逆 $\iff$ 積が負。
→ (2) 線分と直線が共有点をもつのは、端点が直線をはさむか、直線上にあるとき。積が 0 以下で、$f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})\leqq 0$。$f(2,4)=2a-3$，$f(3,-1)=3a+2$ を代入すると、a の 2 次不等式になる。
→ 図でも確かめる。ℓ は a によらず点 $(0,1)$ を通り、傾きを変えながら回る。A を通るときと B を通るときが境目。

解答

(1)　$f(x,y)=ax-y+1$ は x，y の 1 次式であり、直線 ℓ は $f(x,y)=0$ と表される。直線 ℓ は平面を 2 つの部分に分け、1 次式 f の値は**直線 ℓ をまたぐときにだけ符号が変わる**ので、一方の部分では $f>0$（正領域）、他方の部分では $f<0$（負領域）となる。

したがって、2 点 A，B が ℓ をはさんで反対側にあることは、$f(\mathrm{A})$ と $f(\mathrm{B})$ が**異符号**であること、すなわち

$$f(2,4)\cdot f(3,-1)<0$$

と同じである。

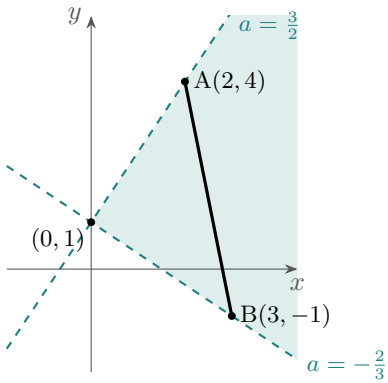
(2)　線分 AB と ℓ が共有点をもつのは、A，B が ℓ をはさんで反対側にあるか、A または B が ℓ 上にあるときである。よって条件は

$$f(2,4)\cdot f(3,-1)\leqq 0$$

である。$f(2,4)=2a-4+1=2a-3$，$f(3,-1)=3a+1+1=3a+2$ であるから

$$(2a-3)(3a+2)\leqq 0 \quad\iff\quad -\frac{2}{3}\leqq a\leqq \frac{3}{2}$$

したがって $\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}\leqq a\leqq \dfrac{3}{2}}$



ℓ は点 $(0,1)$ のまわりを回る直線。A を通るとき（$a=\frac{3}{2}$）と B を通るとき（$a=-\frac{2}{3}$）のあいだで、線分 AB と交わる。

方針の候補

○ **端点を f に代入して、積の符号を見る**。$f(\mathrm{A})f(\mathrm{B}) \leqq 0$。 ▶ **Point 2-5-4**

○「1 次式は直線をまたぐときだけ符号が変わる」を**説明として書く**。

△ ℓ が定点 $(0,1)$ を通ることに注目し、A を通るときと B を通るときの傾きではさむ … うまくいく。ただし、求める傾きが 2 つの値の「あいだ」になるか「外側」になるかを、定点と線分の位置関係から図で確かめる手間が増える。

△ 直線 AB の式と ℓ の式を連立して交点の x 座標を出し、$2 \leqq x \leqq 3$ を解く … うまくいく。分数不等式になり、分母の符号で場合分けが要る。

× $f(\mathrm{A})f(\mathrm{B}) < 0$（等号なし）で答える … ℓ が端点 A や B を通るときも**共有点をもつ**。等号を落とすと端の値が抜ける。

× $f(\mathrm{A}) > 0$ かつ $f(\mathrm{B}) < 0$ だけを解く … 逆の組み合わせ（$f(\mathrm{A}) < 0$ かつ $f(\mathrm{B}) > 0$）も「反対側」。**積でまとめる**と取りこぼさない。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 定点のまわりに回して傾きではさむ道

ℓ は a によらず点 $\mathrm{P}(0,1)$ を通る。

P と A を結ぶ直線の傾きは $\dfrac{4-1}{2-0}=\dfrac{3}{2}$，P と B を結ぶ直線の傾きは $\dfrac{-1-1}{3-0}=-\dfrac{2}{3}$。

P は線分 AB の左側にあり、P から見て線分 AB は傾き $-\dfrac{2}{3}$ から $\dfrac{3}{2}$ までの範囲に見える。

$\to -\dfrac{2}{3} \leqq a \leqq \dfrac{3}{2}$。同じ結論に到達する。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 交点の x 座標を求めて範囲に入れる道

直線 AB は $y=-5x+14$。ℓ と連立して $ax+1=-5x+14 \iff (a+5)x=13$。
$a=-5$ のときは平行で交わらない。$a\neq -5$ のとき $x=\dfrac{13}{a+5}$ で、これが $2\leqq x\leqq 3$ を満たせばよい。
$2\leqq \dfrac{13}{a+5}$ から $a+5>0$ が必要で、両辺に $a+5$ を掛けて $2(a+5)\leqq 13\leqq 3(a+5)$。
$\to -\dfrac{2}{3}\leqq a\leqq \dfrac{3}{2}$。同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・1 次式 $f(x,y)$ の符号は**直線 $f=0$ をまたぐときだけ変わる**。片側が正領域、片側が負領域。
・「2 点が直線をはさむ」 $\iff f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})<0$。積でまとめると組み合わせを取りこぼさない。
・「線分と直線が共有点をもつ」は端点が直線上にある場合も含むので $\leqq 0$。
・文字を含む直線は**定点を通るかどうか**を見ると、図で答えを確かめられる。
・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。代入・回転・連立のどれでも同じ答えになる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 2-5-4 正領域・負領域
$f(x,y)>0$ を満たす点の全体を**正領域**、$f(x,y)<0$ を満たす点の全体を**負領域**という。
f が 1 次式なら、曲線（直線）$f=0$ は平面を 2 つに分け、**一方が正領域、他方が負領域**になる。
積の形 $f\cdot g>0$ は「**同符号**」、$f\cdot g<0$ は「**異符号**」に読みかえる。展開せず、**因数分解された形のまま**境界を描いてテスト点で調べるとよい。

問 32

円 $C : x^2 + y^2 = 25$ と点 $\mathrm{A}(1, 2)$ について、A を通る C の弦を考える。
(1) 弦の中点 M の軌跡を求めよ。 (2) 弦の長さが最小になるときの弦の長さを求めよ。 (3) (2) のときの弦を含む直線の方程式を求めよ。

問題を見て思うこと

弦の中点は、中心から弦に下ろした垂線の足。 ▶Point 2-4-5
→ $1^2 + 2^2 = 5 < 25$ で、A は円の内部。弦が引ける。
→ (1) OM ⊥（弦）で、弦は A を通るので $\angle \mathrm{OMA} = 90°$。→ OA を直径とする円になる。式では $\overrightarrow{\mathrm{MO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0$ から $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$。除外点：M = O（弦が直径）も M = A（OA に垂直な弦）も存在するので、円全体。
→ (2) 弦の長さは $2\sqrt{25 - \mathrm{OM}^2}$ なので、OM が最大のとき最小。M は OA を直径とする円上にあるので、OM の最大は直径 $\mathrm{OA} = \sqrt{5}$（M = A のとき）。弦は $2\sqrt{25-5} = 4\sqrt{5}$。
→ (3) M = A のとき、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1, 2)$ を法線として ▶Point 2-3-6 $x + 2y - 5 = 0$。原点との距離 $\sqrt{5}$ から弦 $4\sqrt{5}$ が出て、(2) と合う。

解答

$1^2 + 2^2 = 5 < 25$ より、A は円 C の内部にある。以下、C の中心を O とする。

(1) 弦の中点を $\mathrm{M}(x, y)$ とすると、中心から弦に下ろした垂線の足が中点であるから OM ⊥ AM、すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{MO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0$$

（M が O または A に一致するときも、この式は成り立つ。）これを座標で書くと

$$(0 - x)(1 - x) + (0 - y)(2 - y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 - x - 2y = 0$$

平方完成して

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}}$$

すなわち**線分 OA を直径とする円**（中心 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$、半径 $\frac{\sqrt{5}}{2}$）である。

(2) 弦の長さは $2\sqrt{25 - \mathrm{OM}^2}$ であるから、OM **が最大のとき最小**になる。M は (1) の円上を動き、その円は O を通るから、OM が最大となるのは M が O の**直径の反対側**、すなわち M = A のときで

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OA} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

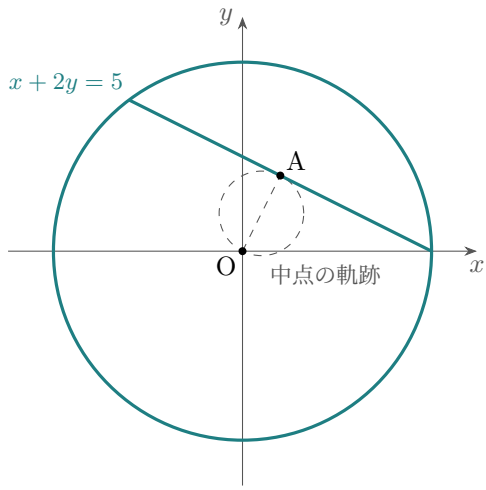
このとき弦の長さは

$$2\sqrt{25 - 5} = 2\sqrt{20} = \boldsymbol{4\sqrt{5}}$$

(3) M = A のとき、弦は A を通り OA に垂直である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1, 2)$ を法線ベクトルとすると

$$1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 2) = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x + 2y - 5 = 0}$$

（検算：原点とこの直線の距離は $\dfrac{|-5|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$ で、弦の長さは $2\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$。一致する。）



中点 M は OA **を直径とする円**を描く。OM が最大（M = A）のとき弦は最短。

方針の候補

○ 弦の中点は**中心から弦への垂線の足**。∠OMA = 90° から OA **を直径とする円**。 ▶ **Point 2-4-5**

○ 弦の長さ $=2\sqrt{r^2-\mathrm{OM}^2}$ より、OM **が最大のとき弦は最小**。

○ 最短の弦は OA **に垂直**。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を法線ベクトルにして書く。 ▶ **Point 2-3-6**

△ (1) を $\overrightarrow{\mathrm{MO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=0$ から計算で出す … うまくいく。図形的に「OA を直径とする円」と見えれば計算が短く済むが、**式でも確かめておくと安心**。

△ (2) を「弦の傾きを m とおいて長さを m の関数にする」… うまくいくが、根号を含む関数の最小になって重い。OM **の最大に読みかえる**のが要点。

× A が円の内部にあることを確かめない … 外部なら弦は引けない。$1+4=5<25$ を書く。

× (2) で「OM が最小のとき弦が最小」とする … 逆。OM **が大きいほど弦は短い**。式で確かめる。

× (3) で弦の長さだけ答えて直線を書かない … 設問は直線の方程式。

この問題で身につくこと

- 弦の中点は**中心から弦への垂線の足**。OM ⊥（弦）。
- 定点を通る弦の中点は ∠OMA = 90° より OA **を直径とする円**を描く。
- 「定線分を見込む角が 90°」$\Longrightarrow$ **その線分を直径とする円**。頻出の読みかえ。
- 弦の長さ $=2\sqrt{r^2-d^2}$。d **が大きいほど弦は短い**。
- だから**最短の弦を探す問題は** d **の最大を探す問題**になる。
- 最短の弦は OA **に垂直**な弦。図でも納得できる。
- 先に**定点が円の内部か**を確かめる。外部なら弦は引けない。
- 答えが出たら**距離の公式で弦の長さを計算し直す**。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 2-4-5 弦の長さ
（本文は問 17 参照）
弦の長さ $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$。**中心から弦に下ろした垂線の足が弦の中点**。

Point 2-5-2 軌跡の解き方
（本文は問 22 参照）
「定線分 OA を 90° で見込む点の軌跡」は OA **を直径とする円**。