この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学II BC 第 1 章「式と証明・高次方程式」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 1　次の (1)〜(5) について、**式のどんな特徴に目をつけ、どの手を使うか**を答え、実際にその手で処理せよ。

(1) $x+y=4,\ xy=2$ のとき x^3+y^3 の値。

(2) $y \neq 0$ のとき $x^2-3xy+2y^2=0$ を満たす $\dfrac{x}{y}$ の値。

(3) $x \neq 0$ のとき $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ を $t=x+\dfrac{1}{x}$ で表す。

(4) $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ を「(整式) + (分子の次数が分母より低い分数)」の形に直す。

(5) $\begin{cases} y=x^2-2x \\ x=y^2-2y \end{cases}$ から $x,\ y$ の関係を 1 つ導く。　(Point 1-1-1)

問 14　等式 $x^3=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ が x についての恒等式となるように、定数 $a,\ b,\ c,\ d$ を定めよ。**「係数を比較する」「数値を代入する」の 2 通りで求め、2 つの解法を比較せよ。**　(Point 1-3-3)

問 27　次の余りを求めよ。

(1) x^{10} を $(x-1)^2$ で割った余り　　(2) x^{10} を $(x-1)^2(x+1)$ で割った余り　(Point 1-5-14)

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 33　n を自然数とする。

(1) $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ を n の式で表せ。

(3) すべての自然数 n について $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}<\frac{1}{4}$ が成り立つことを示せ。

(Point 1-3-5)

解説編（見本）

問 1

次の (1)〜(5) について、式のどんな特徴に目をつけ、どの手を使うかを答え、実際にその手で処理せよ。

(1) $x+y=4,\ xy=2$ のとき x^3+y^3 の値。　(2) $y \neq 0$ のとき $x^2-3xy+2y^2=0$ を満たす $\dfrac{x}{y}$ の値。　(3) $x \neq 0$ のとき $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ を $t=x+\dfrac{1}{x}$ で表す。　(4) $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ を「(整式) + (分子の次数が分母より低い分数)」の形に直す。　(5) $\begin{cases} y=x^2-2x \\ x=y^2-2y \end{cases}$ から $x,\ y$ の関係を 1 つ導く。

問題を見て思うこと

章のフロー：式変形で手が止まったら、**①式の特徴に合った処理をする** → **②次数を下げる** → **③文字を減らす**。この問題は①。 ▶ Point 1-1-1

→ 手を動かす前にまず式を眺めて、特徴を見つけてから手を選ぶ。

→ (1) x と y を入れかえても変わらない。→ **対称式**。基本対称式 $x+y,\ xy$ で表す。 ▶ Point 1-1-2

→ (2) 各項の次数が 2 でそろっている。→ **同次式**。y^2 で割って $\dfrac{x}{y}$ の 1 文字にする。割ってよいのは $y \neq 0$ と断られているから。

→ (3) x と $\dfrac{1}{x}$ が対で出ている。→ **相反式**の合図。$t=x+\dfrac{1}{x}$ をカタマリで扱う。 ▶ Point 1-1-3

→ (4) 分子の次数 2 が分母の次数 1 以上。→ **分数式**。割り算して次数を下げる。

→ (5) x と y を入れかえると、もう一方の式になる。→ **サイクリックな式**。辺々引くと $x-y$ が因数として出てくる。

解答

(1)　$x,\ y$ を入れかえても変わらない**対称式**。基本対称式で表す。

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\cdot 2\cdot 4=64-24=\mathbf{40}$$

(2)　各項の次数がそろった**同次式**。$y \neq 0$ より両辺を y^2 で割ると

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\cdot\frac{x}{y}+2=0$$

$t=\dfrac{x}{y}$ とおくと $t^2-3t+2=0$、$(t-1)(t-2)=0$。よって

$$\frac{x}{y}=\mathbf{1},\ \mathbf{2}$$

(3)　x と $\dfrac{1}{x}$ が対で出る**相反式**の形。$t = x + \dfrac{1}{x}$ の両辺を 2 乗すると

$$t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\therefore \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \boldsymbol{t^2 - 2}$$

(4)　（分子の次数）≧（分母の次数）の**分数式**。分子を分母で割る。

$$\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+2}{x-1} = \boldsymbol{x + 1 + \frac{2}{x-1}}$$

(5)　x と y を入れかえると互いに移り合う**サイクリックな式**。辺々引くと

$$y - x = \left(x^2 - y^2\right) - 2(x - y)$$

右辺を $x - y$ でくくって

$$-(x-y) = (x-y)(x+y) - 2(x-y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x-y)(x+y-2+1) = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{(x-y)(x+y-1) = 0}$$

すなわち $x = y$ または $x + y = 1$ である。

方針の候補

○ **先に式の特徴を言葉にしてから**手を選ぶ。対称式・同次式・相反式・分数式・サイクリック の 5 つが引き出し。 ▶ Point 1-1-1

△ (1) で x, y を実際に求めてから代入する ⋯ うまくいく。x, y は 2 次方程式 $u^2 - 4u + 2 = 0$ の解 $2 \pm \sqrt{2}$ なので、代入すれば出る。ただし**根号の 3 乗を計算することになり重い**。対称式の意味は「求めずに済ませられる」ところにある。

△ (2) で $x^2 - 3xy + 2y^2 = (x-y)(x-2y)$ と因数分解する ⋯ うまくいく。$x = y$ または $x = 2y$ から $\dfrac{x}{y} = 1,\ 2$。**むしろこちらのほうが計算が短く済む**。同次式の手は、因数分解できないときの保険と思ってよい。

× (2) で y を 0 にして割る ⋯ $y \neq 0$ の断りが要る。問題文にあるので使ってよいが、**自分で立てた式で割るときは確認する**。

× (3) で $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2$ とする ⋯ $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$ を展開すると**真ん中に 2 が出る**。$t^2 - 2$。

× (5) で 2 式を足す ⋯ 足すと $x + y = x^2 + y^2 - 2(x+y)$ となり、$x - y$ の因数が出ない。**サイクリックは引くのが基本**。

この問題で身につくこと

・この章の芯は**「式を見た瞬間に何を疑うか」**。手を動かす前にまず眺める。
・**対称式**（入れかえて不変）→ 基本対称式 $x + y$, xy で表す。
・**同次式**（各項の次数がそろう）→ $\dfrac{x}{y} = t$ とおいて 1 文字に。

・**相反式**（x と $\dfrac{1}{x}$ が対）→ $t = x + \dfrac{1}{x}$ をカタマリで。2 乗したら -2 を忘れない。
・**分数式** → まず割って（分子の次数）$<$（分母の次数）にする。
・**サイクリック**（入れかえると互いに移る）→ 辺々引く。$x - y$ が因数で出てくる。
・特徴が見つからないときの次の手は**②次数を下げる ③文字を減らす**。順番も込みで覚える。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 1-1-1【重要】特徴のある式を見たときの発想パターンまとめ
式変形で手が止まったら、次の 3 つを思い出す。
①式の特徴に合った処理をする（下のパターン集）　②次数を下げる　③文字を減らす
対称式：x，y を入れかえても変わらない式 → 基本対称式 $x + y$，xy で表せ！
同次式：各項の次数がそろっている式 → $\dfrac{x}{y} = t$ とおいて 1 文字に！
相反式：係数が回文（トマト・しんぶんし型）→ $x + \dfrac{1}{x} = t$ とおけ！
分数式：→ 割り算して（分子の次数）$<$（分母の次数）の形にせよ！
サイクリックな式：x と y を入れかえるともう一方の式になる → 辺々 $\pm$ せよ！

問 14

等式 $x^3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c, d を定めよ。**「係数を比較する」「数値を代入する」の 2 通りで求め、2 つの解法を比較せよ。**

問題を見て思うこと

→ 恒等式の問題。手は**係数比較**と**数値代入**の 2 つ。 ▶Point 1-3-3

→ 主題は、この 2 つの性格の違い。→ 係数比較は**必要十分**で、確認が要らない。→ 数値代入は**必要条件しか出ない**ので、逆の確認を書くか、3 次以下の式が相異なる 4 点で一致することを根拠に述べる。

→ 係数比較：右辺は $x-1$ のかたまりで並んでいる。→ $x-1=t$ とおくと、左辺は $(t+1)^3 = t^3+3t^2+3t+1$、右辺は at^3+bt^2+ct+d。→ $a=1$, $b=3$, $c=3$, $d=1$。係数 $1,3,3,1$ は二項係数。 ▶Point 1-3-1

→ 数値代入：$x=1$ を入れると $(x-1)$ の項が全部消えて $d=1$。→ $x=0$, 2, -1 を入れて 3 元連立にすると、同じ答え。手間は係数比較より多い。

→ 使い分けの基準は、**代入して項がごっそり消える値があるか**。→ たとえば右辺が $(x-1)(x-2)(x-3)$ の形なら数値代入、なければ係数比較。

解答

[**解法 1：係数比較**]　$x-1=t$ とおくと $x=t+1$ であるから、与式は

$$(t+1)^3 = at^3+bt^2+ct+d$$

左辺を展開すると

$$t^3+3t^2+3t+1 = at^3+bt^2+ct+d$$

これが t についての恒等式であるための必要十分条件は、両辺の同じ次数の係数が一致することであるから

$$a=\mathbf{1}, \qquad b=\mathbf{3}, \qquad c=\mathbf{3}, \qquad d=\mathbf{1}$$

[**解法 2：数値代入**]　与式に $x=1$ を代入すると、$x-1$ を含む項がすべて 0 になり

$$1=d$$

さらに $x=0$, $x=2$, $x=-1$ を代入すると、$d=1$ を用いて

$$-a+b-c=-1, \qquad a+b+c=7, \qquad -8a+4b-2c=-2$$

はじめの 2 式を加えて $2b=6$ より $b=3$。これを $a+b+c=7$ に入れて $a+c=4$。第 3 式に $b=3$ を入れると $-8a-2c=-14$、すなわち $4a+c=7$。$a+c=4$ との差から $3a=3$、$a=1$、$c=3$。

逆に $a=1$, $b=3$, $c=3$, $d=1$ のとき、右辺は $(t+1)^3=x^3$ となり左辺に一致するから、確かに恒等式である。（あるいは、両辺の差は 3 次以下の整式であり、相異なる 4 個の値 $x=1,0,2,-1$ で 0 になるから、恒等的に 0 である、としてもよい。）

[2 **解法の比較**]　この問題では、右辺がすでに $x-1$ の降べきの順に整っているので、$x-1=t$ と置きかえた**係数比較のほうが計算が短く済む**。数値代入は $x=1$ で d が一発で出る利点はあるが、残り 3 文字の連立を解く手間がかかり、さらに**逆の確認が必要**になる。一般には、右辺が $(x-1)(x-2)(x-3)$ のような**因数の積の形**で、代入すると項がごっそり消える値があるときは数値代入のほうが計算が短く済む。**そういう値がなければ係数比較**、と判断するとよい。

方針の候補

○ $x-1=t$ とおいて両辺を t の式にそろえ、**係数を比較**する。この問題では最短。 **▶ Point 1-3-3**

○ 数値代入で求めたときは、**逆の確認を書く**（または「3 次以下の式が相異なる 4 点で一致するから恒等式」と述べる）。

△ 置きかえずに右辺を展開して x の係数を比べる ··· うまくいく。$(x-1)^3$，$(x-1)^2$ を展開して整理すれば同じ答え。ただし**展開の手間が増える**ぶん事故が起きやすい。

△ $x=1,0,2,-1$ を代入して 4 元連立を解く ··· うまくいく。$x=1$ で d が即座に出るのは利点だが、残りは連立を解く手間がかかる。

× 数値代入だけで求め、確認も根拠も書かない ··· **数値代入は必要条件**。「そのとき本当にすべての x で成り立つか」に答えていない。

× 2 通りで求めたのに**比較を書かない** ··· この問題は比較まで含めて設問。どちらが計算が短く済み、どういうときに逆転するかを書く。

×「恒等式」と「方程式」を混同する ··· 恒等式は**すべての x で成り立つ**等式、方程式は**特定の x で成り立つ**等式。求めるものが違う。

この問題で身につくこと

・恒等式の手は**係数比較**と**数値代入**の 2 つだけ。
・**係数比較は同値**（必要十分）。確認が要らない。
・**数値代入は必要条件**にすぎない。逆の確認を書くか、(次数 $+1$) **個の点で一致**を根拠に述べる。
・$(x-1)$ のかたまりが並んでいたら $x-1=t$ **と置きかえる**。式がまとまる。
・**代入して項がごっそり消える値があるか**が、2 手の使い分けの基準。
・x^3 を $(x-1)$ の式で書くと係数が $1,3,3,1$。**二項係数**が出るのは偶然ではない。
・恒等式（すべての x）と方程式（特定の x）を混同しない。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 1-3-3 恒等式問題の解き方

1. **係数比較**：両辺を降べきの順に整理し、同じ次数の係数を等しいとおく。**必要十分**。
2. **数値代入**：都合のよい値を代入する。**必要条件しか出ない**ので、逆の確認を書くか、n 次以下の式が相異なる $n+1$ 点で一致することを根拠にする。

代入で項が消える値があるかどうかで使い分ける。

問 27

次の余りを求めよ。
(1) x^{10} を $(x-1)^2$ で割った余り　　(2) x^{10} を $(x-1)^2(x+1)$ で割った余り

問題を見て思うこと

→ 10 乗の割り算は、実際に割るのは大変。→ **余りを文字でおく**のが定石。 ▶ Point 1-5-14
→ (1) 割る式は 2 次、余りは 1 次以下：$x^{10}=(x-1)^2Q(x)+ax+b$。→ $x=1$ を代入すると $1=a+b$ の 1 本だけ。未知数は 2 つで足りない。**重解型は代入だけでは情報が足りない**。
→ $x-1$ のかたまりで考える。→ $x^{10}=\{1+(x-1)\}^{10}=\displaystyle\sum_{k=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_k(x-1)^k$（二項定理）。
▶ Point 1-3-1 → $k\geqq 2$ の項は $(x-1)^2$ で割り切れるので、余りは $1+10(x-1)=10x-9$。
→ (2) 割る式は 3 次、余りは 2 次以下：$x^{10}=(x-1)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$。→ $x=1,\ -1$ を代入すると $1=a+b+c,\ 1=a-b+c$ で、$b=0$。まだ 1 本足りない。
→ (1) の結果を使う。→ $(x-1)^2(x+1)Q(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるので、x^{10} と ax^2+bx+c を $(x-1)^2$ で割った余りは等しい。→ $ax^2+bx+c=a(x-1)^2+(2a+b)x+(c-a)$ より、$2a+b=10,\ c-a=-9$。
→ $b=0$ より $a=5,\ c=-4$。余りは $5x^2-4$。検算：$x=\pm1$ を入れると $5-4=1$。

解答

(1)　$x=1+(x-1)$ と見て二項定理により展開すると

$$x^{10}=\{1+(x-1)\}^{10}=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_k(x-1)^k$$

$k\geqq 2$ の項はすべて $(x-1)^2$ で割り切れるから、$(x-1)^2$ で割った余りは $k=0,1$ の項、すなわち

$$1+10(x-1)=\boldsymbol{10x-9}$$

（検算：$x=1$ とすると $10-9=1$ で、$1^{10}=1$ に一致する。）

(2)　割る式が 3 次だから、余りを ax^2+bx+c とおくと

$$x^{10}=(x-1)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c \qquad (*)$$

$(*)$ に $x=1$、$x=-1$ を代入すると

$$1=a+b+c,\qquad 1=a-b+c$$

辺々引いて $2b=0$、すなわち $b=0$。
次に、$(x-1)^2(x+1)Q(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるから、x^{10} と ax^2+bx+c を $(x-1)^2$ で割った余りは等しい。ここで

$$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+(2a+b)x+(c-a)$$

であるから、その余りは $(2a+b)x+(c-a)$ である。これが (1) の $10x-9$ に等しいので

$$2a+b=10, \qquad c-a=-9$$

$b=0$ より $a=5$、したがって $c=5-9=-4$。よって余りは

$$\boldsymbol{5x^2-4}$$

（検算：$x=\pm1$ のとき $5-4=1$ となり、$(\pm1)^{10}=1$ に一致する。）

方針の候補

○ 余りを**文字でおく**（割る式より 1 次低いところまで）。 ▶Point 1-5-14

○ $(x-1)^2$ 型は $x=(x-1)+1$ **と見て二項定理**で展開する。$k\geqq 2$ の項は消える。 ▶Point 1-3-1

○ (2) は **(1) の結果を使う**。$(x-1)^2$ で割った余りが一致することから条件を 1 本追加する。 ▶Point 1-5-15

△ 両辺を微分して $x=1$ を代入する ··· うまくいく。$10x^9=2(x-1)Q+(x-1)^2Q'+a$ に $x=1$ で $a=10$。**数Ⅱ第 5 章を学んだあとなら最短**。未習なら二項定理の道を使う。

△ (2) で $x^{10}=(x-1)^2Q_1+10x-9$ の Q_1 を $x+1$ で割って組み立てる ··· うまくいくが Q_1 が具体的に分からないので、$x=-1$ を代入して $Q_1(-1)$ を求める工夫が要る。

× $x=1$ の代入だけで (1) を決めようとする ··· 式が 1 本、未知数が 2 つ。**重解型では代入だけでは足りない**。

× (2) の余りを 1 次以下とおく ··· 割る式が 3 次なので**余りは 2 次以下**。

× $x=1$ を「2 回代入」して 2 本の式とする ··· 同じ式が 2 回出るだけで情報は増えない。

この問題で身につくこと

・高次の割り算は**余りを文字でおく**。次数は**割る式より 1 低いところまで**。
・$(x-1)^2$ のような**重解型では、代入だけでは式の本数が足りない**。ここが急所。
・打開策その 1：$x=(x-\alpha)+\alpha$ **と見て二項定理**。$(x-\alpha)^2$ 以上の項は消える。
・打開策その 2：**両辺を微分して** $x=\alpha$（数Ⅱ第 5 章）。
・$(x-1)^2(x+1)$ で割る問題は、$(x-1)^2$ **で割った余りが一致する**ことを使って条件を足す。
・$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+(2a+b)x+(c-a)$ の**書き直し**が鍵。
・答えが出たら $x=\pm1$ **を代入して検算**する。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 1-5-14 $(x-\bigcirc)^2$ **で割った余り**
余りを $ax+b$ とおいても、$x=\bigcirc$ の代入からは式が 1 本しか出ない。
$x=(x-\bigcirc)+\bigcirc$ **と見て二項定理で展開する**か、**両辺を微分して** $x=\bigcirc$ **を代入する**。

Point 1-5-15 $(x-\bigcirc)^2(x-\triangle)$ **で割った余り**
余りを ax^2+bx+c とおく。$x=\bigcirc$, $x=\triangle$ の代入で 2 本、さらに $(x-\bigcirc)^2$ **で割った余りが一致する**ことから 1 本を得る。

問 33

n を自然数とする。
(1) $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$ が成り立つことを示せ。 (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ を n の式で表せ。 (3) すべての自然数 n について $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} < \frac{1}{4}$ が成り立つことを示せ。

問題を見て思うこと

→ 分数の和は、**部分分数に分けて打ち消し合わせる**。 ▶ Point 1-3-5
→ (1) 示すべき等式が与えられている。→ 右辺の { } の中を通分すると、分子は $(k+2)-k=2$。
→ $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)}$ となり、左辺に一致する。
→ (2) $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ とおくと、(1) は $\dfrac{1}{2}(a_k - a_{k+1})$。→ **隣どうしの差**なので、足すと中間が消えて両端だけ残る。→ $\dfrac{1}{2}(a_1 - a_{n+1}) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$。
→ まとめると $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$。検算：$n=1$ でもとの和は $\dfrac{1}{6}$、公式も $\dfrac{1\cdot 4}{4\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{1}{6}$。
→ (3) **差の形のほうが使いやすい**。→ $\dfrac{1}{4} - (\text{和}) = \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$ は正で、一行で終わる。→ まとめた形だけでは (3) が苦しいので、差の形も残しておく。

解答

(1)　右辺の { } の中を通分すると

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

よって右辺は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ となり、左辺に一致する。 ■

(2)　$a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ とおくと、(1) より

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}(a_k - a_{k+1})$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = \frac{1}{2}(a_1 - a_{n+1}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \qquad (\star)$$

これを 1 つの分数にまとめると、分子は $(n+1)(n+2)-2 = n^2+3n = n(n+3)$ であるから

$$\boldsymbol{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

（検算：$n=1$ のとき左辺は $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{1}{6}$、右辺は $\dfrac{1\cdot4}{4\cdot2\cdot3}=\dfrac{1}{6}$ で一致する。）

(3)　$(\star)$ より

$$\frac{1}{4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

n は自然数であるから $(n+1)(n+2)>0$ であり、右辺は正である。したがって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}<\frac{1}{4}$$

がすべての自然数 n について成り立つ。　■

方針の候補

○ (1) は**右辺を通分**して左辺に一致させる。分子に 2 が出て $\dfrac{1}{2}$ と相殺する。 ▶ Point 1-3-5

○ (2) は $a_k=\dfrac{1}{k(k+1)}$ とおいて $\dfrac{1}{2}(a_k-a_{k+1})$ **の和**とみる。中間が消えて両端だけ残る。

○ (3) は $\dfrac{1}{4}$ **から引いた差の形**を使う。まとめた形に戻さない。

△ (2) を $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2k}-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{2(k+2)}$ と 3 つに分ける … うまくいくが、消え方が 1 つ飛ばしになって扱いにくい。2 **つの差にまとめる**ほうがよい。

△ (3) を数学的帰納法で示す … うまくいくが、(2) がある以上まわり道。**前の小問を使う**のが誘導問題の作法。

× (1) を左辺から出発して部分分数分解を「発見」しようとする … 示すべき式が与えられているので**右辺から通分**するほうが計算が短く済む。

× (2) で**両端の残り方を間違える** … 残るのは a_1 と a_{n+1}。書き出して確かめる。

× (3) で $n\to\infty$ の極限を持ち出す … 数IIIの内容。ここは**差が正であること**だけで足りる。

この問題で身につくこと

- 分数の和は**部分分数に分けて打ち消し合わせる**。中間が消えて両端だけ残る。
- 示すべき等式が与えられているなら**右辺を通分して左辺へ**。こちらが計算が短く済む。
- $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ は 3 **つに分けずに** 2 **つの差にまとめる**。$\dfrac{1}{k(k+1)}$ の差。
- 前に出る $\dfrac{1}{2}$ は**両端の差**から来ている。理由が分かれば忘れない。
- 残るのは a_1 と a_{n+1}。**最初の数項を書き出して**消え方を確かめる。
- **差の形** $(\star)$ **を残しておく**。まとめた形だけだと (3) で苦しむ。
- 不等式は**（大）−（小）**>0 を示す。ここは差がそのまま正の分数。
- $\dfrac{1}{4}$ は**届かない上限**。和はいくら足しても $\dfrac{1}{4}$ を超えない。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 1-3-5 部分分数分解

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},\qquad \frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

一般に $\dfrac{1}{(k+p)(k+q)}=\dfrac{1}{q-p}\left(\dfrac{1}{k+p}-\dfrac{1}{k+q}\right)$。
分けたあとは**隣どうしの差**になり、和をとると中間が消える。