この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学Ⅰ A 第 8 章「整数」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 14　1 から 200 までの自然数について、次の個数を求めよ。

(1) 6 の倍数　　(2) 4 の倍数または 6 の倍数　　(3) 4 でも 6 でも割り切れない数

（Point 8-2-14）

問 19　次の問いに答えよ。

(1) ユークリッドの互除法を用いて、1073 と 703 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(2) 縦 52 cm、横 124 cm の長方形の板を、同じ大きさの正方形のタイルで余りなく敷き詰める。タイルの一辺を最も長くするとき、一辺の長さとタイルの枚数を求めよ。（Point 8-2-19）

問 23　次の問いに答えよ。

(1) $xy-2x-3y=4$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ。

(2) $2xy+4x-y-9=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ。

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ。（Point 8-3-4）

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 38　整数 n に対し、方程式 $7x+11y=n\cdots$ ① を考える。

(1) $7x+11y=1$ を満たす整数 $x,\ y$ を全て求めよ。

(2) 任意の整数 n について、①を満たす整数の組 $(x,\ y)$ で $0\leqq y\leqq 6$ であるものが、ちょうど 1 組存在することを示せ。

(3) $n=59$ のとき、①を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ が存在しないことを示せ。また、$n\geqq 60$ のとき、①を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ が存在することを示せ。（Point 8-3-2）

解説編（見本）

問 14

1 から 200 までの自然数について、次の個数を求めよ。
(1) 6 の倍数　　(2) 4 の倍数または 6 の倍数　　(3) 4 でも 6 でも割り切れない数

問題を見て思うこと

1 から n までの a の倍数の個数は、n **を** a **で割った商**。 ▶ Point 8-2-14
→ (1) $200 \div 6$ の商。
→ (2)「または」は**ベン図**。重なりは 4 **の倍数かつ** 6 **の倍数**、すなわち 4 と 6 の最小公倍数 12 の倍数。
→ (3)「どちらでもない」は、全体から (2) を引く。

解答

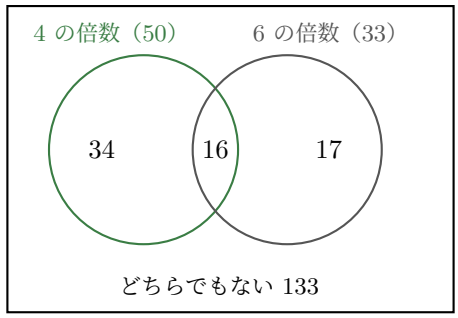
(1)　$200 = 6 \times 33 + 2$ より、6 の倍数は **33** 個。

(2)　4 の倍数は $200 \div 4 = 50$ 個、6 の倍数は 33 個。4 の倍数かつ 6 の倍数は、最小公倍数 12 の倍数で、$200 = 12 \times 16 + 8$ より 16 個。

$$50 + 33 - 16 = \mathbf{67} \text{ 個}$$

(3)　全体 200 個から (2) を引いて

$$200 - 67 = \mathbf{133} \text{ 個}$$



図：4 の倍数だけ 34、両方（12 の倍数）16、6 の倍数だけ 17、どちらでもない 133（合計 200）。

方針の候補

○ 倍数の個数は**商**。「または」は**ベン図**で、重なりを引く。 ▶ Point 8-2-14
○ 重なりは**最小公倍数の倍数**。
△ 12 ごとの周期で数える ··· 解ける。ただし、余りの部分 193 から 200 を別に数えるなど、場合を分ける手間が増える。

× (2) $50+33=83$ とする ⋯ 12 の倍数を 2 回数えている。重なりを引く。

× 重なりを $4\times6=24$ の倍数と考える ⋯ 4 と 6 は互いに素でない。両方の倍数は**最小公倍数 12 の倍数**。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 12 ごとの周期で数える道（(2)）
1 から 12 までに、4 の倍数または 6 の倍数は 4, 6, 8, 12 の 4 個。$200=12\times16+8$ なので、$12\times16=192$ までに $4\times16=64$ 個。残り 193 から 200 では 196, 198, 200 の 3 個。$64+3=67$。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

- n 以下の a の倍数は n **を** a **で割った商**。
- 「A または B」は $A+B-(A$ **かつ** $B)$。
- 両方の倍数は**最小公倍数の倍数**（4 と 6 なら 12）。
- 「どちらでもない」は**全体から引く**。
- **ベン図**をかく癖をつける。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 8-2-14 倍数の個数 (標準)
a, n は自然数とする。

1 から n までの n 個の自然数のうち，a の倍数の個数は，n を a で割ったときの商として現れる。
ex.) 2 の倍数または 3 の倍数の個数は？ などといった問題ではベン図を書く癖をつけておこう。

問 19

次の問いに答えよ。

(1) ユークリッドの互除法を用いて、1073 と 703 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(2) 縦 52 cm、横 124 cm の長方形の板を、同じ大きさの正方形のタイルで余りなく敷き詰める。タイルの一辺を最も長くするとき、一辺の長さとタイルの枚数を求めよ。

問題を見て思うこと

$a = bq + r$ のとき $\gcd(a,\ b) = \gcd(b,\ r)$。割り算を繰り返すと、大きな 2 数の最大公約数が出る。**商 q の値は最大公約数に関係しない**。 ▶ Point 8-2-19

→ (1) 互除法で G、最小公倍数は $L = \dfrac{ab}{G}$。

→ (2) タイルの一辺は 52 **と** 124 **の公約数**。最も長いのは最大公約数。→ 長方形から正方形を切り取る操作が互除法に対応する。

解答

(1)

$$1073 = 1 \cdot 703 + 370, \quad 703 = 1 \cdot 370 + 333, \quad 370 = 1 \cdot 333 + 37, \quad 333 = 9 \cdot 37$$

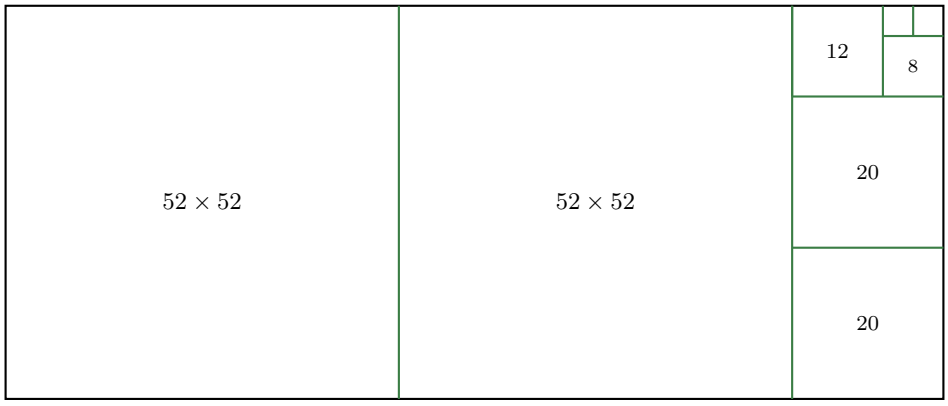
よって最大公約数は **37**。最小公倍数は $\dfrac{1073 \times 703}{37} = 29 \times 703 = \mathbf{20387}$（$1073 = 29 \cdot 37$）。

(2)

$$124 = 2 \cdot 52 + 20, \quad 52 = 2 \cdot 20 + 12, \quad 20 = 1 \cdot 12 + 8, \quad 12 = 1 \cdot 8 + 4, \quad 8 = 2 \cdot 4$$

より $\gcd(124,\ 52) = 4$。タイルの一辺は 52 と 124 の公約数でなければならないので、最も長いのは **4** cm。枚数は

$$\frac{52}{4} \times \frac{124}{4} = 13 \times 31 = \mathbf{403} \text{ 枚}$$



図：124 × 52 の長方形から、52 の正方形 2 個、20 の正方形 2 個、12 の正方形、8 の正方形、4 の正方形 2 個を順に切り取る。最後の正方形の一辺 4 が最大公約数（商 $2, 2, 1, 1, 2$ は個数に対応）。

方針の候補

○ **互除法**：$a = bq + r$ のとき $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ を繰り返す。 **▶ Point 8-2-19**

○ 最小公倍数は $L = \dfrac{ab}{G}$。 **▶ Point 8-2-8**

△ (1) 素因数分解して指数を比べる ··· 解ける。ただし、1073 の素因数を試し割りで見つける手間がかかる。

× 商 1, 1, 1, 9 を最大公約数の手がかりとする ··· 商は最大公約数に関係しない。最大公約数は**最後に割り切れたときの割る数**。

× (2) 最大公約数ではなく最小公倍数を使う ··· タイルの一辺は 52 と 124 の約数なので、公約数（最も長いのは最大公約数）。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 素因数分解で出す道（(1)）

$1073 = 29 \cdot 37$, $703 = 19 \cdot 37$ と試し割りで見つけると、共通する素因数は 37 で最大公約数 37。最小公倍数は $19 \cdot 29 \cdot 37 = 20387$。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・互除法は $\gcd(a,\ b) = \gcd(b,\ r)$ **を繰り返す**。
・最大公約数は**最後に割り切れたときの割る数**。商は関係しない。
・最小公倍数は $L = \dfrac{ab}{G}$。
・長方形に正方形を敷き詰める問題は**最大公約数**。互除法の図と対応する。
・大きな数で素因数が見つけにくいときは、**互除法**が頼りになる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 8-2-19 ユークリッドの互除法とその活用パターン 3 つ
a は b の倍数でないとし、a を b で割った余りを r とすると、

$$a = bq + r \text{ のとき、} gcd(a,b) = gcd(b,r)$$

(1) これを繰り返し用いることで、**大きな 2 数の最大公約数**を求めることができる。間違えやすいのが、〃商q〃 **の値はいつも最大公約数に関係しない**ので注意しておこう。
・長方形に正方形を敷き詰めるやり方も便利なので復習しておこう。
また、ユークリッドの互除法はほかにも以下のようなことに活用できる。
(2) **最小公倍数を求める**
最大公約数 G が求まると、
$A = GA', B = GB'$
(A', B' は互いに素な自然数) と表せ、
最小公倍数 $L = GA'B' \left(= \dfrac{AB}{G}\right)$ が求まる
(3)**【重要】2 元 1 次不定方程式の整数解の 1 つを探し当てる**（詳しくは Point 8-3-2 参照）

以上 **3 つ**がユークリッドの互除法の活用場面として有名なものである。

Point 8-2-8 最大公約数、最小公倍数の性質

（本文は問 8 参照）

問 23

次の問いに答えよ。

(1) $xy-2x-3y=4$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ。

(2) $2xy+4x-y-9=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ。

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：整数問題ときたら**①積の形をつくる** ②不等式で範囲を絞る ③余りで分類。この問題は①。 ▶ 整数問題の全体像

→ $xy+\bullet x+\blacktriangle y+c=0$ は $(x+\blacktriangle)(y+\bullet)-\bullet\blacktriangle+c$ で積の形。 ▶ **Point 8-3-4**

→ (1) 係数 $-2,\ -3$ から $(x-3)(y-2)$。→ 定数項を合わせる。

→ (2) xy の係数が 2。→ $(2x+\bullet)(y+\blacktriangle)$ の形を作る。

→ (3) 分母をはらって xy の式にしてから、(1) と同じ形。

解答

(1)　$(x-3)(y-2)=xy-2x-3y+6$ であるから

$$xy-2x-3y=4 \iff (x-3)(y-2)=10$$

$x-3,\ y-2$ は整数で積が 10 であるから、$(x-3,\ y-2)$ は 10 の約数の組（負も含む）。

$$(x-3,\ y-2)=(1,\ 10),\ (2,\ 5),\ (5,\ 2),\ (10,\ 1),\ (-1,\ -10),\ (-2,\ -5),\ (-5,\ -2),\ (-10,\ -1)$$

$$(x,\ y)=\mathbf{(4,\ 12),\ (5,\ 7),\ (8,\ 4),\ (13,\ 3),\ (2,\ -8),\ (1,\ -3),\ (-2,\ 0),\ (-7,\ 1)}$$

(2)　$(2x-1)(y+2)=2xy+4x-y-2$ であるから、$2xy+4x-y=9$ より

$$(2x-1)(y+2)=7$$

7 は素数であるから $(2x-1,\ y+2)=(1,\ 7),\ (7,\ 1),\ (-1,\ -7),\ (-7,\ -1)$。いずれも $2x-1$ は奇数で、x は整数になる。

$$(x,\ y)=\mathbf{(1,\ 5),\ (4,\ -1),\ (0,\ -9),\ (-3,\ -3)}$$

(3)　両辺に $3xy$ を掛けて $3y+3x=xy$。$xy-3x-3y=0$ より

$$(x-3)(y-3)=9$$

$x,\ y$ は自然数であるから $x-3\geqq -2,\ y-3\geqq -2$。積が 9 となる整数の組のうち、これを満たすのは $(x-3,\ y-3)=(1,\ 9),\ (3,\ 3),\ (9,\ 1)$ のみ（$(-1,\ -9)$ などは $-9<-2$ で不適）。

$$(x,\ y)=\mathbf{(4,\ 12),\ (6,\ 6),\ (12,\ 4)}$$

方針の候補

○ $xy+\bullet x+\blacktriangle y$ は**積の形**にする。 ▶ **Point 8-3-4**

○ (3) 分数は**分母をはらって**から積の形に。自然数の条件で**範囲を絞る**。

△ (1) y について整理し、商の形 $y=2+\dfrac{10}{x-3}$ を作る $\cdots$ 解ける。ただし、$x-3$ が 10 の約数という条件を自分で立てる。

× (3) $(x-3)(y-3)=9$ の負の組も答えに入れる $\cdots$ x, y は自然数なので $x-3 \geqq -2$。-9 や -3 は範囲外。

× (2) $2x-1$ に、7 の正の約数だけを当てる $\cdots$ 負の約数 -1, -7 も入れる。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ y について整理して商の形にする道（(1)）

$xy-3y=2x+4$ より $y(x-3)=2x+4$。$y=\dfrac{2x+4}{x-3}=2+\dfrac{10}{x-3}$。$y$ が整数となるには、$x-3$ が 10 の約数（±1, ±2, ±5, ±10）であればよい。$x=4,\ 5,\ 8,\ 13,\ 2,\ 1,\ -2,\ -7$ に対応して、$y=12,\ 7,\ 4,\ 3,\ -8,\ -3,\ 0,\ 1$。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・$xy+\bullet x+\blacktriangle y+c=0$ は $(x+\blacktriangle)(y+\bullet)=\cdots$ の形に。
・xy の係数が 1 でないときは**係数を含めて括弧を作る**（$(2x-1)(y+2)$）。
・分数の式は**分母をはらって**から積の形に。
・積の形ができたら**約数の組を（負も含めて）並べる**。
・自然数の条件があれば**不等式で範囲を絞り**、不適な組を落とす。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 8-3-4 2 次不定方程式 $xy+\bullet x+\blacktriangle y+c=0$ の解法
セオリー通り，積の形を作り，不等式で範囲を絞れ！
$xy+\bullet x+\blacktriangle y+c=(x+\blacktriangle)(y+\bullet)-\bullet\blacktriangle+c$ を用いて積の形へもっていく。
ex.) $xy+3x-y-8=0 \iff (x-1)(y+3)=5$
　　$\mathbf{3}xy+9x-y-8=0 \iff (3x-1)(y+3)=5$
不等式での絞り方は，別ポイント参照。自然数条件などから。
※共通因数でくくって積の形で処理したりという場合もある。

Point 8-2-7【重要】素数条件の扱い方
（本文は問 7 参照）

問 38

整数 n に対し、方程式 $7x+11y=n \cdots$ ① を考える。
(1) $7x+11y=1$ を満たす整数 $x,\ y$ を全て求めよ。
(2) 任意の整数 n について、①を満たす整数の組 $(x,\ y)$ で $0 \leqq y \leqq 6$ であるものが、ちょうど 1 組存在することを示せ。
(3) $n=59$ のとき、①を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ が存在しないことを示せ。また、$n \geqq 60$ のとき、①を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ が存在することを示せ。

問題を見て思うこと

章のフロー：整数問題ときたら ①**積の形** ②**不等式で範囲を絞る** ③**余りで分類**。この問題は①→③→②と全部使う。 ▶整数問題の全体像
→ (1) $ax+by=1$ は**特殊解 ＋ 辺々引く**。▶Point 8-3-2　→ (2) n 倍した解の y を 7 **で割った余り**で整理する。余りは**ただ 1 通り**。▶Point 8-2-18
→ (3) (2) の 1 組の解 $(x_1,\ y_1)$ から、0 以上の解がどう並ぶかを見る。$x_1 \geqq 0$ なら存在し、$x_1 < 0$ なら……。▶Point 8-3-7

解答

(1)　$7\cdot(-3)+11\cdot 2=1$ より $(x,\ y)=(-3,\ 2)$ は 1 組の解。辺々引くと $7(x+3)=-11(y-2)$。7 と 11 は互いに素であるから、$x+3=11k,\ y-2=-7k$（k は整数）。

$$(x,\ y)=\boldsymbol{(-3+11k,\ 2-7k)}$$

(2)　(1) の解を n 倍すると、$(x_0,\ y_0)=(-3n,\ 2n)$ は ① の解の 1 つ。辺々引いて $7(x-x_0)=-11(y-y_0)$、7 と 11 が互いに素であるから、①の整数解は

$$(x,\ y)=(x_0+11k,\ y_0-7k)\quad (k \text{ は整数})$$

と表される。このとき $y=y_0-7k$ は、y_0 と 7 で割った余りが等しい整数全体を動く。除法の性質より、7 で割った余りが y_0 と等しい整数のうち $0 \leqq y \leqq 6$ を満たすものは、y_0 を 7 で割った余りとして**ただ 1 つ**。この y に対応する k が定まり、$(x,\ y)$ もちょうど 1 組定まる。

(3)　(2) の $0 \leqq y \leqq 6$ の解を $(x_1,\ y_1)$ とする。①の整数解は、k を整数として $(x,\ y)=(x_1+11k,\ y_1-7k)$（$k$ は整数）と表せる。$y \geqq 0$ かつ $y_1 \leqq 6$ より、$y_1-7k \geqq 0$ となるのは $k \leqq 0$ のとき。そこで $m=-k \geqq 0$ とおくと

$$(x,\ y)=(x_1-11m,\ y_1+7m)\quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

となり、$y \geqq 0$ の解はこの形に限る。ゆえに、$x \geqq 0$ となるものが存在するのは、$m=0$ のときの $x_1 \geqq 0$ の場合に限られる（$x_1-11m \leqq x_1$）。つまり

$$①\text{が } 0 \text{ 以上の解をもつ} \iff x_1 \geqq 0$$

- $n=59$：y_1 は $y_0=2\cdot59=118$ を 7 で割った余り 6（$118=7\cdot16+6$）。$7x_1=59-11\cdot6=-7$ より $x_1=-1<0$。よって 0 以上の解は存在しない。
- $n\geqq60$：$7x_1=n-11y_1\geqq60-11\cdot6=-6$。よって $x_1\geqq-\dfrac{6}{7}>-1$。x_1 は整数であるから $x_1\geqq0$。よって 0 以上の解 $(x_1,\ y_1)$ が存在する。

方針の候補

○ (1) **特殊解を見つけて辺々引く**。(2) y を 7 **で割った余り**で整理し、一意性を使う。**▶Point 8-3-2**

○ (3) $y_1\leqq6$ から x_1 **の下限**を不等式で出す（$x_1>-1$ なら $x_1\geqq0$）。**▶Point 8-3-7**

△ (3) $y=0,\ 1,\ldots,\ 5$ を順に代入して $59-11y$ が 7 の倍数かを調べる（$n=59$ の部分）$\cdots$ 解ける。ただし、$n\geqq60$ の部分には使えず、別の議論が要る。

△ (3) $n=60,\ 61,\ldots,\ 66$ の 7 個に解があることを示し、7 を足していく（x を 1 増やす）$\cdots$ 解ける。ただし、7 個の解を自分で探す必要がある。

× (2) $0\leqq y\leqq6$ の解が存在することだけを示して終える $\cdots$ 問われているのは「ちょうど 1 組」で、一意性の確認が要る。

× (3) $n=59$ を「$7\cdot11-7-11$」と覚えた公式に任せる $\cdots$ 公式を覚えているだけでは、答案に理由を書けない。(2) の構造から導く。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ y **を順に代入する道（(3) の** $n=59$**）**

$y\geqq0$ と $11y\leqq59$ より $y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$。$59-11y=59,\ 48,\ 37,\ 26,\ 15,\ 4$ は、どれも 7 の倍数でない。よって $7x+11y=59$ を満たす 0 以上の整数の組は存在しない。→ 同じ結論に到達する。

△ 60 **から** 66 **の解を示して** 7 **ずつ足す道（(3) の** $n\geqq60$**）**

$60=7\cdot7+11\cdot1$、$61=7\cdot4+11\cdot3$、$62=7\cdot1+11\cdot5$、$63=7\cdot9+11\cdot0$、$64=7\cdot6+11\cdot2$、$65=7\cdot3+11\cdot4$、$66=7\cdot0+11\cdot6$。n に 7 を足すには x を 1 増やせばよいので、60 から 66 の連続する 7 個に 0 以上の解があれば、それ以降の全ての n に 0 以上の解がある。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・$ax+by=1$ は**特殊解と辺々引く**。n にして解くなら n **倍**。
・文字 y を 7 **で割った余り**で整理すると、**一意に定まる**。
・0 以上の解は、**一般解に不等式**を入れて調べる。
・「全ての $n\geqq60$ で存在」は、x_1 **の下限** >-1 **と整数であること**から導く。
・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。**連続する 7 個から広げる道**もある。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 8-3-2【重要】2 元 1 次不定方程式 $ax+by=1$ **の解法**
① 1 組の整数解を見つける
② **辺々引いて「積の形」をつくる→「互いに素を利用した式処理」**a,b **が互いに素のとき、**$ax=by$ **であれ**

ば、xはbの倍数 **かつ** yはaの倍数 ※最初からうまく積の形をつくれる場合は一気に「互いに素を利用した式処理」から始めてよい。
※①を見つけるのが難しい時は、ユークリッドの互除法利用。

Point 8-2-18 除法の性質
（本文は問 18 参照）

Point 8-3-7「2. 不等式で範囲を絞る」
（本文は問 26 参照）