この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学Ⅰ A 第 6 章「場合の数」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 1　赤玉と白玉を横一列に並べる。赤玉が 3 個以上続いて並ぶことがないような並べ方を考える。赤玉どうし、白玉どうしは区別しない。

(1) 5 個の玉を並べるとき、並べ方は何通りあるか。「全体から引く」考え方で求めよ。

(2) n 個の玉を並べるときの並べ方の数を a_n とする。a_1，a_2，a_3 を求めよ。また、$n \geqq 4$ のとき $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ が成り立つことを示し、a_6 を求めよ。　（Point 6-2-1）

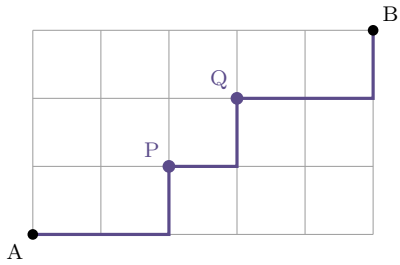
問 8　首飾りを作る方法の数を求めよ。回転して重なるもの、裏返して重なるものは同じとみなす。

(1) 異なる 8 個の玉で作る

(2) 赤玉 3 個と白玉 3 個で作る

(3) 赤玉 2 個、白玉 2 個、青玉 1 個で作る　（Point 6-2-7）

問 22　下の図のような碁盤の目状の道がある。A から B まで、遠回りせずに進む道順を考える。



図：碁盤の目の道と道順の例（太線）。この道順は →→↑→↑→→↑ の文字列に対応する。

(1) 道順は全部で何通りか。

(2) 点 P を通る道順は何通りか。

(3) 点 Q を通らない道順は何通りか。　（Point 6-3-5）

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 27　正十二角形の 12 個の頂点から 3 個を選んで三角形を作る。頂点は円周上に等間隔にあり、隣り合う頂点の間の弧を 1 個分と数える。

(1) 直角三角形は何個できるか。

(2) 3 頂点が円周を 3 つの弧に分けるとき、その弧の個数の組 $(a,\ b,\ c)$（$a+b+c=12$）と三角形の形の関係を調べ、鋭角三角形の個数を求めよ。

(3) 鈍角三角形は何個できるか。　（Point 6-3-6）

解説編（見本）

問 1

赤玉と白玉を横一列に並べる。赤玉が 3 個以上続いて並ぶことがないような並べ方を考える。赤玉どうし、白玉どうしは区別しない。

(1) 5 個の玉を並べるとき、並べ方は何通りあるか。「全体から引く」考え方で求めよ。

(2) n 個の玉を並べるときの並べ方の数を a_n とする。a_1，a_2，a_3 を求めよ。また、$n \geqq 4$ のとき $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ が成り立つことを示し、a_6 を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①直接求める → ②全体から引く（余事象）→ ③漸化式。(1) は②、(2) は③。

▶ **Point 6-2-1**

→ (1)「3 個以上続く」を直接数えると場合が多い。→ 制限なしの $2^5 = 32$ 通りから、3 **個続く並びを含むもの**を引く。

→ (2) n 個の列は、**先頭がどう始まるか**で切れる。→ 残りは「$n-1$ 個、$n-2$ 個、$n-3$ 個」の同じ形の問題になる。

解答

赤を R、白を W と書く。

(1)　制限なしの並べ方は、各位置が R か W かで $2^5 = 32$ 通りである。このうち RRR を含むものを、「RRR が**最初に現れる位置**」で分けて数える。

- 1 ～ 3 番目が RRR：残り 2 個は自由で $2^2 = 4$ 通り
- 2 ～ 4 番目が最初：1 番目は W（R だと 1 ～ 3 番目が先に RRR になる）。5 番目は自由で 2 通り
- 3 ～ 5 番目が最初：2 番目は W。1 番目は自由で 2 通り

RRR を含むものは $4 + 2 + 2 = 8$ 通りであるから、求める並べ方は

$$32 - 8 = \mathbf{24} \text{ 通り}$$

(2)　$a_1 = 2$（R, W）、$a_2 = 4$（RR, RW, WR, WW）、$a_3 = 2^3 - 1 = 7$（RRR だけが不適）である。$n \geqq 4$ のとき、条件を満たす列を先頭の様子で分ける。

- W で始まる：残りの $n-1$ 個が条件を満たす列で a_{n-1} 通り
- RW で始まる：残りの $n-2$ 個で a_{n-2} 通り
- RRW で始まる：残りの $n-3$ 個で a_{n-3} 通り

RRR で始まる列は不適である。また $n \geqq 4$ なので、RR で始まる列の 3 番目は存在し、R だと不適だから W になる。以上は互いに重ならず、もれもないから

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \qquad (n \geqq 4)$$

よって $a_4 = 7 + 4 + 2 = 13$，$a_5 = 13 + 7 + 4 = 24$，

$$a_6 = 24 + 13 + 7 = \mathbf{44}$$

（$a_5 = 24$ は (1) の答えと一致する。）

方針の候補

○「3 個以上続く」を直接数えるより、**その否定（含むもの）を引く**。 ▶ Point 6-2-1

○ n 個の列を先頭で切ると、**同じ形の問題（$n-1$，$n-2$，$n-3$ 個）**になる。漸化式に持ち込む。 ▶ Point 6-2-1

△ 白玉の個数で場合分けして直接数える … 解ける。場合は多いが数え落としには注意すれば済む。

× RRR の位置が 3 か所だから $32 - 3 \times 4 = 20$ とする … 位置が違っても同時に起こる並び（RRRR を含むものなど）を**重ねて引いて**いる。最初に現れる位置で切れば重ならない。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 白玉の個数で場合分けする道

白玉 k 個が、赤玉の並びを $k+1$ 個のかたまりに分ける。各かたまりの赤玉は 0，1，2 個のどれか。玉は 5 個なので赤玉は $5-k$ 個。

$k=0$：赤 5 個が 1 かたまりで不適 → 0 通り。$k=1$：赤 4 個を 2 かたまりに → $(2,2)$ の 1 通り。$k=2$：赤 3 個を 3 かたまりに → $(1,1,1)$ の 1 通りと、$(2,1,0)$ の並べ替え 6 通りで 7 通り。$k=3$：赤 2 個を 4 かたまりに → $(2,0,0,0)$ の並べ替え 4 通りと、$(1,1,0,0)$ の並べ替え 6 通りで 10 通り。$k=4$：赤 1 個を 5 かたまりに → 5 通り。$k=5$：1 通り。

合計 $0+1+7+10+5+1=24$ 通りで、(1) と同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

- 「〜でない」「少なくとも」は、**否定を数えて全体から引く**ことを考える。
- 引くときは、**重なり**に注意する。位置で分けるときは「最初に現れる位置」で切ると重ならない。
- n 個を並べる問題は、**先頭（または最後）で場合分け**すると同じ形の問題に帰着し、漸化式になる。
- 漸化式は、**小さい n の値を確かめてから**立てる。a_5 が (1) と一致することが検算になる。
- どれか 1 つしか正解でない、ということはない。直接・余事象・漸化式のどれでも解ける。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 6-2-1 3 つの基本的方針

①直接求める，②全体から引く (余事象)，③漸化式立てる

問 8

首飾りを作る方法の数を求めよ。回転して重なるもの、裏返して重なるものは同じとみなす。

(1) 異なる 8 個の玉で作る

(2) 赤玉 3 個と白玉 3 個で作る

(3) 赤玉 2 個、白玉 2 個、青玉 1 個で作る

問題を見て思うこと

じゅず順列 $=\dfrac{(\text{円順列})+(\text{対称なもの})}{2}$。**裏返して自分自身に重なる**円順列が「対称なもの」。

▶Point 6-2-7

→ (1) 異なる 8 個は対称なものがない。$\dfrac{7!}{2}$。

→ (2)(3) 同じものを含むときは、円順列の個数と、そのうち対称なものを**書き出して**数える。

解答

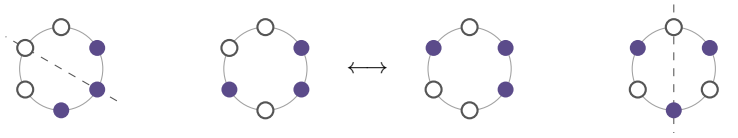
(1)　異なる 8 個の円順列は $7!=5040$ 通りで、対称なものはない。よって

$$\frac{7!}{2}=\mathbf{2520}\text{ 通り}$$

(2)　白玉 3 個の間にはさまる赤玉の個数を、時計回りに $(a,\ b,\ c)$ $(a+b+c=3)$ とすると、円順列は

$$(3,0,0),\quad (2,1,0),\quad (2,0,1),\quad (1,1,1)$$

の 4 通りである（$(2,1,0)$ と $(2,0,1)$ は、時計回りの順が違うので別の並び）。



図：● は赤玉、○ は白玉。いちばん上の白玉から時計回りに見て、白玉の間の赤玉の個数が $(a,\ b,\ c)$。点線は、裏返したときの折り返しの軸。

このうち裏返して自分自身に重なるのは $(3,0,0)$ と $(1,1,1)$ の 2 個。$(2,1,0)$ と $(2,0,1)$ は裏返すと互いに入れ替わる。よって

$$\frac{4+2}{2}=\mathbf{3}\text{ 通り}$$

(3)　青玉は 1 個だけなので固定する。残り 4 個（赤 2，白 2）の並べ方は $\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$ 通りで、これが円順列の個数である。

裏返して自分自身に重なるのは、青玉を通る軸で折り返しても同じ並び、すなわち残り 4 個の列が左右対称（逆から読んでも同じ）なもの。赤白白赤，白赤赤白の 2 個。よって

$$\frac{6+2}{2}=\mathbf{4}\text{ 通り}$$

方針の候補

○ 円順列の個数と、**対称なものの個数**を数えて $\dfrac{N+S}{2}$。 ▶ **Point 6-2-7**

× (2)(3) を円順列の個数 $\div 2$ とする ··· 対称なものは裏返しても自分自身で、**2 個で 1 組にならない**。(2) なら $4 \div 2 = 2$ となり合わない。

この問題で身につくこと

・異なる n 個（$n \geqq 3$）は**対称なものがなく**、$\dfrac{(n-1)!}{2}$。

・同じものを含むときは**「円順列の個数 N」と「対称なもの S」**を数え、$\dfrac{N+S}{2}$。

・2 で割る前に、**対称な並びが出ていないか**を調べる。

・円順列の数え方は、固定する方法と間隔で分ける方法のどちらでもよい。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 6-2-7 じゅず順列

円順列のうち，さらに裏返して重なるものも同じとみなした並べ方を**じゅず順列**という（首飾り・ブレスレットなど）。

裏返しても自分自身に重なる円順列を，ここでは「対称なもの」とよぶことにする。対称でない円順列は，裏返すと別の並びと重なるので，2 個で 1 組になる。対称なものは，裏返しても自分自身なので，1 個で 1 つ。よって

$$(\text{じゅず順列}) = \frac{(\text{円順列}) - (\text{対称なもの})}{2} + (\text{対称なもの})$$

整理すると，次の式で計算できる。

$$(\text{じゅず順列}) = \frac{(\text{円順列}) + (\text{対称なもの})}{2}$$

・全部異なる n 個（$n \geqq 3$）の円順列には，対称なものがない。よって $\dfrac{(n-1)!}{2}$ となる。

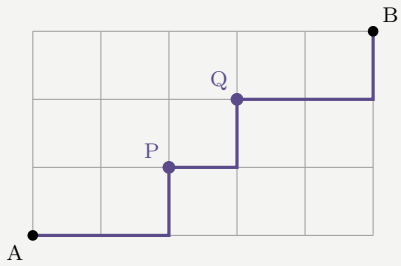
・**同じものを含むときは，対称なものが出ることがある**。単純に 2 で割ると，合わないことがある。

Point 6-2-6 円順列

（本文は問 7 参照）

問 22

下の図のような碁盤の目状の道がある。A から B まで、遠回りせずに進む道順を考える。



図：碁盤の目の道と道順の例（太線）。この道順は →→↑→↑→→↑ の文字列に対応する。

(1) 道順は全部で何通りか。

(2) 点 P を通る道順は何通りか。

(3) 点 Q を通らない道順は何通りか。

問題を見て思うこと

数えにくい状況を、**数えやすい別の状況に翻訳**する。翻訳が **1 対 1** であることを確かめる。 ▶ Point 6-3-5

→ 遠回りしない道順は、「右へ 5 回、上へ 3 回」を並べた文字列と **1 対 1 に対応**する。→ 同じものを含む順列（→ を 5 個、↑ を 3 個）。

→ (2) 通る点が指定されたら**区間ごとに分けて掛ける**。(3) 通らないものは**全体から通るものを引く**。 ▶ Point 6-2-1

解答

(1)　道順は、右へ 1 区画進む → を 5 個、上へ 1 区画進む ↑ を 3 個並べた文字列と 1 対 1 に対応する。8 か所のうち ↑ を置く 3 か所を選んで

$$ {}_8\mathrm{C}_3 = \mathbf{56} \text{ 通り} $$

(2)　A から P（右 2，上 1）までは ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 通り。P から B（右 3，上 2）までは ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り。

$$ 3 \times 10 = \mathbf{30} \text{ 通り} $$

(3)　Q を通る道順を引く。A から Q（右 3，上 2）までは ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り、Q から B（右 2，上 1）までは ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 通りだから、Q を通る道順は $10 \times 3 = 30$ 通り。

$$ 56 - 30 = \mathbf{26} \text{ 通り} $$

方針の候補

○ **文字列に翻訳**する。右 5 個・上 3 個の同じものを含む順列。 ▶ Point 6-3-5

○ 通る点が指定されたら**区間ごとに掛ける**。通らないものは**全体から引く**。

△ 各交点に「そこまでの道順の数」を**書き込む**（左と下の和）･･･ 解ける。表をかく手間がある。

× (3) を、P を通る道順 30 を使って 56 − 30 とする ･･･ 引いているのは Q ではなく P を通る道順。**どの点を通るか**を読み違えている（数値は偶然一致）。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 各交点への道順を書き込む道（(1)）

A から各交点までの道順の数を、左の点と下の点の数の和として順に書き込む（A は 1）。

1	4	10	20	35	56
1	3	6	10	15	21
1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1

（下の行が A の行。表の右上が B。）B の値は 56 で、同じ結論に到達する。P は 3，Q は 10 と読める。

この問題で身につくこと

・遠回りしない道順は**右・上の文字列**と 1 対 1 に対応する。
・通る点が指定されたら**区間ごとに分けて掛ける**。
・通らない点があるときは**全体から、その点を通るものを引く**。
・交点に道順の数を書き込む方法は、**漸化式（加法）**の考え方そのもの。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 6-3-5【数え上げ】問題の状況と 1 対 1 に対応する別の例で考える
数えにくい状況を，**数えやすい別の状況に翻訳**する。翻訳が **1 対 1（もれなく，だぶりなく）**であることを確認しておこう。

Point 6-2-1 3 つの基本的方針
（本文は問 1 参照）

Point 6-2-5 同じものを含む順列
（本文は問 6 参照）

問 27

正十二角形の 12 個の頂点から 3 個を選んで三角形を作る。頂点は円周上に等間隔にあり、隣り合う頂点の間の弧を 1 個分と数える。

(1) 直角三角形は何個できるか。

(2) 3 頂点が円周を 3 つの弧に分けるとき、その弧の個数の組 $(a,\ b,\ c)$（$a+b+c=12$）と三角形の形の関係を調べ、鋭角三角形の個数を求めよ。

(3) 鈍角三角形は何個できるか。

問題を見て思うこと

章のフロー：①直接求める（数え上げ） → ②全体から引く → ③漸化式。(1)(2) は①、(3) は②。 ▶ **Point 6-2-1**

→ 三角形の形は**円周角**で決まる。弧 1 個分は中心角 30°、円周角は 15°。→ 最大の弧が何個分かで形が分かれる。

→ (2) 三角形 1 個を弧の組 (a,b,c) で表すと、始点の選び方ごとに**同じ三角形を 3 回**数える。

→ **重複度 3 で割る**。 ▶ **Point 6-3-6**

解答

弧の組と形　3 頂点が円周を分ける弧の個数を (a,b,c)（$a+b+c=12$，各 1 以上）とする。弧 a 個分に対する円周角は $15^\circ \times a$ だから、三角形の 3 つの角は $15^\circ a,\ 15^\circ b,\ 15^\circ c$ である。したがって

$$\text{鋭角} \iff a,b,c \leqq 5, \qquad \text{直角} \iff \text{どれかが } 6, \qquad \text{鈍角} \iff \text{どれかが 7 以上}$$

(1)　直角三角形の斜辺は円の直径（弧の組に 6 が現れる）。直径になる頂点の組は 6 組。残りの 10 個の頂点から 1 個を選ぶと直角三角形が 1 個決まり、斜辺は 1 つだけなので重複しない。

$$6 \times 10 = \mathbf{60}\ \text{個}$$

(2)　三角形 1 個に対して、始点（弧 a の出発点）の選び方が 3 通りあるので、

$$(\text{始点の頂点の選び方 } 12) \times (\text{順序つきの組 } (a,b,c) \text{ の個数}) \div 3 = (\text{三角形の個数})$$

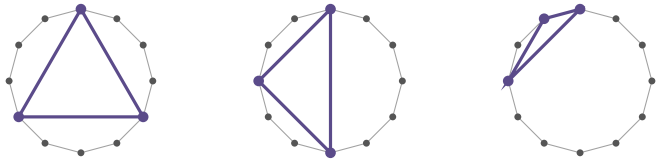
である（全体で確かめると、順序つきの組は ${}_{11}\mathrm{C}_2 = 55$ 組で $12 \times 55 \div 3 = 220 = {}_{12}\mathrm{C}_3$ と合う）。

鋭角になるのは $a,b,c \leqq 5$ のときで、和が 12 だから $(5,5,2)$，$(5,4,3)$，$(4,4,4)$ の並べ替え。順序つきの組は $3+6+1=10$ 組。

$$12 \times 10 \div 3 = \mathbf{40}\ \text{個}$$

(3)　全体 220 個から直角と鋭角を引く。

$$220 - 60 - 40 = \mathbf{120}\ \text{個}$$



鋭角三角形
弧の組 $(4,4,4)$

直角三角形
弧の組 $(3,3,6)$

鈍角三角形
弧の組 $(1,2,9)$

図：3 頂点が円周を分ける弧の長さ（辺の数）の組と、三角形の形。弧の組の最大が 5 以下なら鋭角、6 なら直角、7 以上なら鈍角。

方針の候補

○ 弧の組 (a,b,c) に読み替える。**円周角は弧の半分**。数えるときは重複度 3 で割る。 ▶ Point 6-3-6

○ 直角は**直径**。(3) は全体から引く（余事象）。 ▶ Point 6-2-1

△ (3) を、起点の頂点を決めて直接数える ··· 解ける。起点の決め方に説明が要る。

× (2) の答えを、順序つきの組の個数 10 とする ··· 10 は始点を決めたときの弧の並びの数で、三角形の個数ではない。**始点の選び方 12 通り**を掛け、同じ三角形を 3 回数える分を割る。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 起点を決めて鈍角三角形を直接数える道（(3)）

鈍角三角形の 3 頂点は、ある半円（弧 6 個分）より短い範囲に入る。その範囲の始まりの頂点を起点 P とすると、他の 2 頂点は P から時計回りに 1 ～ 5 個先の頂点から選ばれる。

起点 P は三角形ごとに 1 つに決まるから、$12 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 12 \times 10 = 120$ 個で、同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・三角形の形は**円周角**で決まる。弧の組 (a,b,c) の最大が 5 以下なら鋭角、6 なら直角、7 以上なら鈍角。
・直角三角形は**直径**を斜辺にもつ。
・弧の組で数えるときは、**始点の選び方を掛け、同じ三角形を 3 回数える分を割る**。
・全体 ${}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$ と合うかで**検算**する。
・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。起点を決める道でも同じ値になる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 6-3-6【数え上げ】重複度で割る

区別して数えたあと，**同じものを何回ずつ数えたか**で割る。${}_n\mathrm{C}_r$（$r!$ で割る）も，同じものを含む順列も，円順列も，全部これ。

・**「何回ずつ」がどの場合も同じ**であることが条件。　場合によって重複度が違うときは，そのまま割ってはいけない　（じゅず順列の S がその例。→ Point 6-2-7）。

Point 6-2-8 選ぶ（組合せ ${}_n\mathrm{C}_r$）

（本文は問 6 参照）

Point 6-3-5【数え上げ】問題の状況と 1 対 1 に対応する別の例で考える

（本文は問 22 参照）

Point 6-2-1 3 つの基本的方針

（本文は問 1 参照）