この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学Ⅰ A 第 5 章「図形と計量・図形の性質」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 4　△ABC において $a=\sqrt{6},\ A=60^\circ,\ B=45^\circ$ とする。

(1) b と外接円の半径 R を求めよ。

(2) 余弦定理を c についての方程式とみて解き、c の候補を 2 つ求めよ。

(3) 頂点 C から辺 AB に垂線を下ろす方法で c を求め、(2) の候補のうちどちらが正しいかを判断せよ。さらに $\sin 75^\circ$ の値を求めよ。　（Point 5-2-2）

問 14　△ABC は $\mathrm{AB}=7,\ \mathrm{BC}=3,\ \mathrm{CA}=5$ である。外心を O とする。

(1) ∠C の大きさを求めよ。　(2) 外接円の半径 R を求めよ。

(3) O から辺 AB までの距離 d を求めよ。また、O は辺 AB について C と同じ側にあるか、反対側にあるかを座標を用いて判定せよ。　（Point 5-4-2）

問 21　$\angle\mathrm{A}=90^\circ,\ \mathrm{AB}=3,\ \mathrm{AC}=4$ の直角三角形 ABC がある。辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D、辺 AC を 3 : 1 に内分する点を E とし、BE と CD の交点を P、直線 AP と辺 BC の交点を F とする。

(1) BP : PE を求めよ。　(2) CP : PD を求めよ。

(3) BF : FC を求めよ。　（Point 5-5-3）

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 43　△ABC の外接円の半径を R、内接円の半径を r、外心を O、内心を I とする。直線 AI と外接円の A 以外の交点を D とする。

(1) $\mathrm{DB}=\mathrm{DC}=\mathrm{DI}$ を示せ。

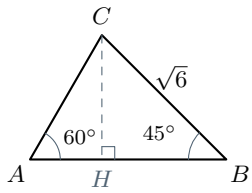
(2) $\mathrm{OI}^2=R^2-2Rr$ を示せ。

(3) $\mathrm{AB}=13,\ \mathrm{BC}=14,\ \mathrm{CA}=15$ のとき、OI の長さを求めよ。　（Point 5-6-3）

解説編（見本）

問 4

△ABC において $a=\sqrt{6},\ A=60^\circ,\ B=45^\circ$ とする。
(1) b と外接円の半径 R を求めよ。
(2) 余弦定理を c についての方程式とみて解き、c の候補を 2 つ求めよ。
(3) 頂点 C から辺 AB に垂線を下ろす方法で c を求め、(2) の候補のうちどちらが正しいかを判断せよ。さらに $\sin 75^\circ$ の値を求めよ。



図：頂点 C から AB に垂線 CH を下ろす（$\mathrm{CH}=\mathrm{BH}=\sqrt{3},\ \mathrm{AH}=1$）

問題を見て思うこと

章のフロー：三角比 → 定理の選択 → 計算。この問題は角が 2 つ分かっている。▶ Point 5-2-3
→ 角がたくさん分かっていて、外接円も聞かれている。→ 正弦定理。　▶ Point 5-2-2
→ (2) 余弦定理は c の 2 次方程式になる。→ 解が 2 つ出る。→ 片方は三角形の条件に合わないはず。
→ (3) 垂線 CH を引くと 45° と 60° の直角三角形に分かれる。→ AH，BH が直接出る。

解答

(1)　正弦定理より

$$\frac{b}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \iff b=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\mathbf{2}$$

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}/2}=2\sqrt{2} \quad \therefore \quad R=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

(2)　$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ に代入して

$$4=6+c^2-2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}c \iff c^2-2\sqrt{3}\,c+2=0 \iff c=\boldsymbol{\sqrt{3}\pm 1}$$

(3)　頂点 C から辺 AB に下ろした垂線の足を H とする。△BCH で $\angle \mathrm{B}=45^\circ$ より

$$\mathrm{CH}=\mathrm{BC}\sin 45^\circ=\sqrt{3}, \qquad \mathrm{BH}=\mathrm{BC}\cos 45^\circ=\sqrt{3}$$

△ACH で $\angle \mathrm{A}=60^\circ$ より $\mathrm{AH}=\dfrac{\mathrm{CH}}{\tan 60^\circ}=1$。したがって

$$c=\mathrm{AH}+\mathrm{BH}=1+\sqrt{3}$$

(2) の候補のうち正しいのは $c = \boldsymbol{\sqrt{3}+1}$。$\sqrt{3}-1$ は BH − AH にあたる値で、H が辺 AB の外側に出る配置のもの。$A = 60°$ のこの図には合わない。

最後に、正弦定理 $c = 2R\sin C$（$C = 75°$）より

$$\sin 75° = \frac{c}{2R} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

方針の候補

○ 角が 2 つ、外接円も絡む ··· **正弦定理**。 ▶ Point 5-2-3

○ 垂線で**直角三角形に分ける**と、特別な角（45°，60°）の三角比だけで c が出る。 ▶ Point 5-2-1

△ c を余弦定理の方程式から求める ··· 解が 2 つ出る。2 つのうち不適な側を別の方法で見分ける手間が残る。

× 余弦定理の解 $\sqrt{3}\pm1$ を両方答えにする ··· 三角形は 1 つに決まるので、**どちらかを捨てる根拠**が要る。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 余弦定理の解を検算で選ぶ道

$c = \sqrt{3}-1$ ($\fallingdotseq 0.73$) と $c = \sqrt{3}+1$ ($\fallingdotseq 2.73$) のそれぞれについて、$A = 60°$ を使う余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ に代入する。

→ $6 = 4 + c^2 - 2c$ より $c^2 - 2c - 2 = 0$、$c = 1 \pm \sqrt{3}$。→ 正の解は $\sqrt{3}+1$ のみ。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・外接円の半径は**正弦定理**（$2R = \dfrac{a}{\sin A}$）。
・余弦定理を辺の方程式にすると**解が 2 つ**出ることがある。
・不適な解は、**図（垂線の足の位置）や別の定理**で見分ける。
・$\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ は、この三角形の辺と外接円から出せる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 5-2-2 正弦定理・余弦定理

△ABC の外接円の半径を R とするとき，

正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

余弦定理：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\iff \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

※正弦定理は，円周角の定理を用いて直径を 1 辺とする直角三角形に角度を移すと導出可。

※よく考えると余弦定理は，ベクトルの大きさに関する下の等式と同じ！ (数学 C)

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}|^2$$

Point 5-2-3 正弦定理・余弦定理の大まかな選択

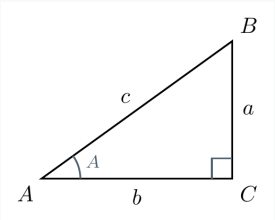
・「辺がたくさん分かっている」ときたら・・・余弦定理！
・「角がたくさん分かっている」ときたら・・・正弦定理！
・「外接円絡み」ときたら・・・正弦定理！

Point 5-2-1 直角三角形を用いた三角比の定義

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \left(\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}\right)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \quad \left(\frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}\right)$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \quad \left(\frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}\right)$$



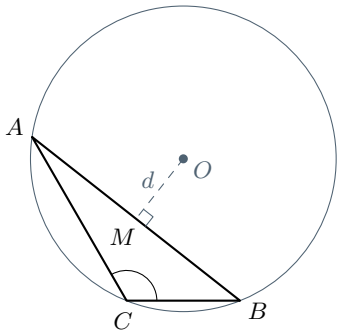
次のように変形し，辺の長さを表すことも多い。

$$a = c\sin A \qquad b = c\cos A \qquad a = b\tan A$$

※ 180° や 360° まで拡張した三角比の定義は，数学Ⅱ BC「三角関数」の正弦・余弦・正接の定義へ。

問 14

△ABC は AB = 7, BC = 3, CA = 5 である。外心を O とする。
(1) ∠C の大きさを求めよ。 (2) 外接円の半径 R を求めよ。
(3) O から辺 AB までの距離 d を求めよ。また、O は辺 AB について C と同じ側にあるか、反対側にあるかを座標を用いて判定せよ。



図：鈍角 ∠C = 120° の三角形では、外心 O は辺 AB について C と反対側

問題を見て思うこと

外心は**各辺の垂直二等分線の交点**。外接円の中心。　▶ Point 5-4-2
→ (1) 辺が 3 つ分かっている。→ 余弦定理で ∠C。
→ (2) 外接円は正弦定理。→ $2R = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$。
→ (3) 辺 AB の中点を M とすると OM ⊥ AB。→ △OAM で三平方の定理。位置の判定は座標が確実。

解答

(1)　余弦定理より

$$\cos C = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad C = \mathbf{120^\circ}$$

(2)　正弦定理より $2R = \dfrac{7}{\sin 120^\circ} = \dfrac{14}{\sqrt{3}}$ であるから $R = \boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$。

(3)　辺 AB の中点を M とすると、OA = R, AM = $\dfrac{7}{2}$, OM ⊥ AB であるから

$$d = \mathrm{OM} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{3} - \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{49}{12}} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{6}}$$

位置は座標で調べる。C(0, 0), B(3, 0), A $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ とおく（CA = 5, $C = 120^\circ$）。外心 O は

BC の垂直二等分線 $x=\dfrac{3}{2}$ 上にあり、$\mathrm{O}\left(\dfrac{3}{2},\ y\right)$ とすると $\mathrm{OC}=\mathrm{OA}$ より

$$\frac{9}{4}+y^2=16+\left(y-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \iff 5\sqrt{3}\,y=\frac{65}{2} \iff y=\frac{13\sqrt{3}}{6}$$

直線 AB は $y=-\dfrac{5\sqrt{3}}{11}(x-3)$、すなわち $y+\dfrac{5\sqrt{3}}{11}(x-3)=0$。左辺に C を代入すると $-\dfrac{15\sqrt{3}}{11}<0$、O を代入すると $\sqrt{3}\left(\dfrac{13}{6}-\dfrac{15}{22}\right)>0$ で、符号が逆である。よって O は辺 AB について **C と反対側**にある。

方針の候補

○ 外心は**垂直二等分線の交点**。辺の中点と結ぶと直角三角形 OAM ができる。 ▶ **Point 5-4-2**

○ ∠C は余弦定理、R は正弦定理。 ▶ **Point 5-2-3**

× 外心は三角形の内部にあるものと決めてかかる ⋯ **鈍角三角形**では外心は三角形の外側に出る。

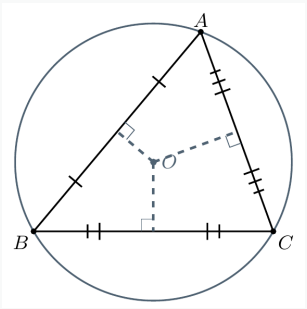
× $d=\sqrt{R^2-7^2}$ とする ⋯ 三平方に入れる辺は**弦の半分**（$\dfrac{7}{2}$）。

この問題で身につくこと

・外心は**垂直二等分線の交点**で、**3 頂点から等距離**。
・外心から弦への距離は**直角三角形** OAM の三平方で出る。
・**鈍角三角形**では外心が三角形の外側に出る。
・位置関係に迷ったら**座標を置いて符号を比べる**。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 5-4-2 外心
三角形の 3 頂点を通る円（**外接円**）がただ一つあり，その中心 O を**外心**という。
各辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。



Point 5-2-3 正弦定理・余弦定理の大まかな選択
・「辺がたくさん分かっている」ときたら・・・余弦定理！
・「角がたくさん分かっている」ときたら・・・正弦定理！
・「外接円絡み」ときたら・・・正弦定理！

Point 5-3-4 鋭角・鈍角の判定

余弦定理で，cos の正負に注目すると，以下のことが得られる。

$$\angle A\text{が鋭角} \iff a^2 < b^2 + c^2$$

$$\angle A\text{が直角} \iff a^2 = b^2 + c^2$$

$$\angle A\text{が鈍角} \iff a^2 > b^2 + c^2$$

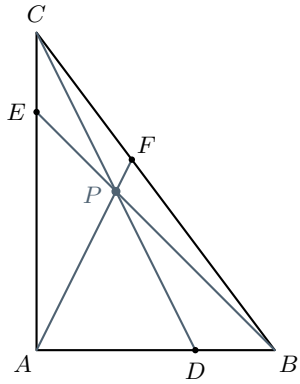
※要は cos の正負でわかるので，ベクトルの分野では，内積の正負でも判断できる。（数学 C）

問 21

$\angle A = 90°$，AB = 3，AC = 4 の直角三角形 ABC がある。辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D、辺 AC を 3 : 1 に内分する点を E とし、BE と CD の交点を P、直線 AP と辺 BC の交点を F とする。

(1) BP : PE を求めよ。 (2) CP : PD を求めよ。

(3) BF : FC を求めよ。



図：AD : DB = 2 : 1，AE : EC = 3 : 1。BE と CD の交点が P、AP の延長が BC と交わる点が F

問題を見て思うこと

メネラウスもチェバも、式は**頂点** → **分点** → **頂点**と辺をひと回りして比を 3 つかける形。

▶ **Point 5-5-3**

→ (1)(2) 直線が三角形の辺を**横切っている**（辺の延長も含む）。→ メネラウス。三角形と直線の組を選ぶのが要点。

→ (3) AF，BE，CD が **1 点 P で交わる**。→ チェバ。

→ 辺の長さは AD : DB = 2 : 1，AE : EC = 3 : 1 しか使わないので、AB = 3，AC = 4 は比のとり方の確認に使う。

解答

(1)　△ABE と、これを横切る直線 CD（辺 AB 上の D、辺 BE 上の P、辺 AE の延長上の C）にメネラウスの定理を使う。

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} \cdot \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}} \cdot \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}} = 1 \iff \frac{2}{1} \cdot \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}} \cdot \frac{1}{4} = 1 \iff \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}} = 2$$

よって BP : PE = **2 : 1**。

(2)　△ACD と直線 BE（辺 AD の延長上の B、辺 CD 上の P、辺 AC 上の E）にメネラウスの定理を使う。

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} \cdot \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1 \iff \frac{3}{1} \cdot \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{1}{3} = 1 \iff \frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PC}} = 1$$

よって CP : PD = **1 : 1**。

(3)　△ABC で AF，BE，CD が 1 点 P で交わるから、チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \iff \frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{1}{3}=1 \iff \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}=\frac{3}{2}$$

よって BF : FC = **3 : 2**。

方針の候補

○ 線が**横切る**なら**メネラウス、1 点で交わる**なら**チェバ**。式は辺をひと回りして比を 3 つかける。
▶ **Point 5-5-3**

△ **面積比**で処理する ··· △ABP などを比で表す。式を覚えていなくても進める。

× 比をかける向きをそろえない ··· $\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}}$ のように逆に書くと答えが**逆数**になる。

× メネラウスとチェバで、使う三角形と交点の関係を取り違える ··· 式の形が同じなので、**図（横切る／1 点で交わる）で区別**する。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 面積比で BF : FC を出す道

△ABC = S とすると △ABE = $\dfrac{3}{4}S$，△ACD = $\dfrac{2}{3}S$。(1)(2) の比から △ABP = $\dfrac{2}{3}$△ABE = $\dfrac{1}{2}S$，△ACP = $\dfrac{1}{2}$△ACD = $\dfrac{1}{3}S$。

→ BF : FC = △ABP : △ACP = $\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}=3:2$。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・メネラウス：**直線が三角形を横切る**。チェバ：**3 直線が 1 点で交わる**。
・式は**頂点** → **分点** → **頂点**でひと回り。比の向きをそろえる。
・使う**三角形と直線の組**を決めてから式を書く。
・面積比でも同じ結果になる（検算）。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 5-5-3 メネラウスの定理，チェバの定理

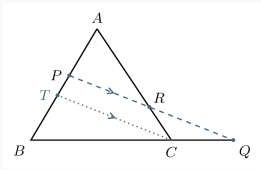
・メネラウスの定理：

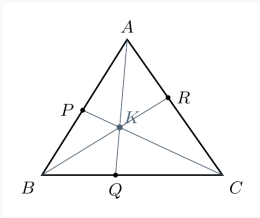
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

・チェバの定理：

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

メネラウスの定理は**平行線で比を移す**ことで、また、チェバの定理は $\frac{AP}{PB}:\frac{\triangle KAC}{\triangle KBC}$ のように，各辺で**線分比を面積比にする**ことで証明できる。ぜひやってみてください。





※ともに，その逆も成り立つ。つまり，メネラウスの定理では**「3 点 P，Q，R が一直線上である」**こと，チェバの定理では**「3 直線 AQ，BR，CP が一点で交わる」**ことが言える。

Point 5-5-1 線分比ときたら面積比も

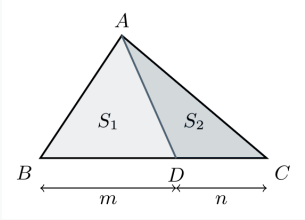
「線分比を求めよ」ときたら・・・面積比も意識せよ！

「高さが共通な 2 つの三角形」の面積比は，底辺の比と同じ！ 同様に，「底辺が共通な 2 つの三角形」の面積比は，高さの比と同じ！ **線分比と面積比は行き来可能**という発想は常に持っておこう。

右図でいえば，△ABD と △ADC は高さが共通なので

$$S_1 : S_2 = m : n$$

が成り立つ。**面積比を聞かれたときも線分比の話に持ち込む**ことが多く，行き来は両方向で使う。



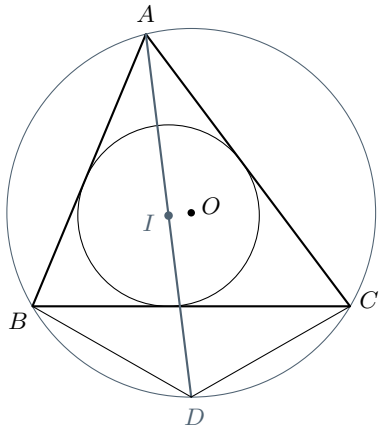
問 43

△ABC の外接円の半径を R、内接円の半径を r、外心を O、内心を I とする。直線 AI と外接円の A 以外の交点を D とする。

(1) $\mathrm{DB} = \mathrm{DC} = \mathrm{DI}$ を示せ。

(2) $\mathrm{OI}^2 = R^2 - 2Rr$ を示せ。

(3) $\mathrm{AB} = 13$, $\mathrm{BC} = 14$, $\mathrm{CA} = 15$ のとき、OI の長さを求めよ。



図：直線 AI と外接円の交点 D（$\mathrm{AB} = 13$, $\mathrm{BC} = 14$, $\mathrm{CA} = 15$）

問題を見て思うこと

章のフロー：円絡みなら**角を追って相似・等しい弦**を探す。　▶ Point 5-6-1

→ (1) AI は ∠A の二等分線。円周角の定理で、弧 BD, DC に対する円周角がどちらも $\dfrac{A}{2}$。→ $\mathrm{DB} = \mathrm{DC}$。DI は三角形の外角で ∠DBI と比べる。

→ (2) 点 I は円の内部。→ 弦 AD について**方べき**：$\mathrm{IA} \cdot \mathrm{ID} = R^2 - \mathrm{OI}^2$。　▶ Point 5-6-4

→ ID = DB は正弦定理で $2R\sin\dfrac{A}{2}$、IA は内接円の半径 r から $\dfrac{r}{\sin(A/2)}$。→ $\sin\dfrac{A}{2}$ が約分で消える。

解答

(1)　$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD} = \dfrac{A}{2}$。円周角の定理より $\angle\mathrm{DBC} = \angle\mathrm{DAC} = \dfrac{A}{2}$, $\angle\mathrm{DCB} = \angle\mathrm{DAB} = \dfrac{A}{2}$。よって $\angle\mathrm{DBC} = \angle\mathrm{DCB}$ で $\mathrm{DB} = \mathrm{DC}$。

次に $\angle\mathrm{DBI} = \angle\mathrm{DBC} + \angle\mathrm{CBI} = \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}$。また $\angle\mathrm{DIB}$ は △ABI の外角であるから $\angle\mathrm{DIB} = \angle\mathrm{IAB} + \angle\mathrm{IBA} = \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}$。$\angle\mathrm{DBI} = \angle\mathrm{DIB}$ より $\mathrm{DB} = \mathrm{DI}$。以上より $\mathrm{DB} = \mathrm{DC} = \mathrm{DI}$。

(2)　直線 OI と外接円の交点を X, Y とすると $\mathrm{IX} = R - \mathrm{OI}$, $\mathrm{IY} = R + \mathrm{OI}$。方べきの定理（点 I は円の内部）より

$$\mathrm{IA} \cdot \mathrm{ID} = \mathrm{IX} \cdot \mathrm{IY} = R^2 - \mathrm{OI}^2$$

$\mathrm{ID} = \mathrm{DB}$ で、△ABD に正弦定理を使うと $\mathrm{DB} = 2R\sin\dfrac{A}{2}$。内接円と AB の接点を F とすると、

△AFI は F が直角で $\angle\mathrm{IAF}=\dfrac{A}{2}$，$\mathrm{IF}=r$ より $\mathrm{IA}=\dfrac{r}{\sin(A/2)}$。したがって

$$R^2-\mathrm{OI}^2=\frac{r}{\sin(A/2)}\cdot 2R\sin\frac{A}{2}=2Rr \iff \mathrm{OI}^2=R^2-2Rr$$

(3) $s=\dfrac{13+14+15}{2}=21$，$S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$ より $r=\dfrac{S}{s}=4$。また $R=\dfrac{abc}{4S}=\dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}=\dfrac{65}{8}$。よって

$$\mathrm{OI}^2=\left(\frac{65}{8}\right)^2-2\cdot\frac{65}{8}\cdot 4=\frac{4225-4160}{64}=\frac{65}{64}\quad\therefore\quad \mathrm{OI}=\boxed{\frac{\sqrt{65}}{8}}$$

方針の候補

○ (1) は**角を追う**。二等分線の角 $\dfrac{A}{2}$ を円周角に移し、内心から外角へ。 ▶Point 5-6-1

○ (2) は**方べき**で $\mathrm{IA}\cdot\mathrm{ID}$ を作り、正弦定理と三角比で $\sin\dfrac{A}{2}$ を約分で消す。 ▶Point 5-6-4

△ (3) だけなら**座標**で O，I を出して距離を計算する … (2) を使わなくても済む。

× 方べきを $\mathrm{IA}\cdot\mathrm{ID}=R^2+\mathrm{OI}^2$ とする … 内部の点では $R^2-\mathrm{OI}^2$（外部の点なら OP^2-R^2）。

× $\mathrm{DB}=\mathrm{DC}$ から DI も等しいと決めつける … DI との関係は外角の等式で**別に示す**必要がある。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ (3) を座標で出す道

$\mathrm{B}(0,\ 0)$，$\mathrm{C}(14,\ 0)$，$\mathrm{A}(5,\ 12)$ とおく（$\mathrm{AB}=13$，$\mathrm{AC}=15$）。外心は $x=7$ 上で $\mathrm{OB}=R=\dfrac{65}{8}$ より $\mathrm{O}\left(7,\ \dfrac{33}{8}\right)$。内心は $r=4$ から $\mathrm{I}(6,\ 4)$。

→ $\mathrm{OI}^2=1^2+\left(\dfrac{1}{8}\right)^2=\dfrac{65}{64}$。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

- **内心 I と外接円上の点** D：$\mathrm{DB}=\mathrm{DC}=\mathrm{DI}$。
- **角を追う**ときは、二等分線の角を**円周角**に移す。
- 点 I が円の内部にあるときの方べき：$R^2-\mathrm{OI}^2$。
- 結論 $\mathrm{OI}^2=R^2-2Rr$（オイラーの定理）。
- 13，14，15 では $R=\dfrac{65}{8}$，$r=4$，$\mathrm{OI}=\dfrac{\sqrt{65}}{8}$。

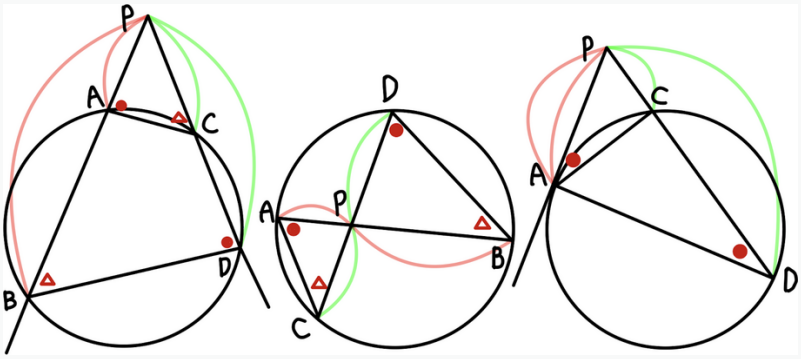
使った Point（本編より。例題は省略）

Point 5-6-1 円周角の定理

「1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。」

$$（\text{円周角}）=\frac{1}{2}\times（\text{中心角}）$$

Point 5-6-4 方べきの定理



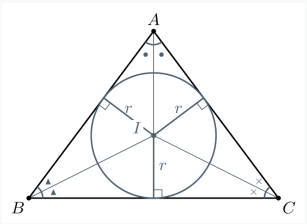
左図と真ん中の図で，$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$ となるので，

$$PA : PC = PD : PB \qquad \therefore \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

右図では，$\triangle PAC \backsim \triangle PDA$ となるので，$PA^2 = PC \cdot PD$ が成立。
（左図で A と B が近づき，$A = B$ となったと認識。）
※いずれも、その逆も成り立つ（つまり、それぞれ図のような円が存在する）。
※忘れてしまいがちだが，方べきはただの相似！

Point 5-4-3 内心
三角形の 3 辺に接する円（**内接円**）がただ一つあり、その中心 I を**内心**という。
3 つの内角の二等分線は 1 点 I で交わる。
また，「内接円の半径 r」を用いると，△ABC の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$



Point 5-4-2 外心
三角形の 3 頂点を通る円（**外接円**）がただ一つあり，その中心 O を**外心**という。
各辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。

