この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学Ⅰ A 第 3 章「2 次関数」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 14　$f(x)=x^2-2ax+a$ とする。$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を $m(a)$ とする。

(1) $m(a)$ を a の式で表せ。

(2) $m(a)$ の最大値と、そのときの a の値を求めよ。　（Point 3-4-3）

問 30　方程式 $|x^2-4x|=k$ の実数解の個数を、定数 k の値によって分類せよ。　（Point 3-7-2）

問 35　2 次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ について、次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる 2 つの正の解をもつ。

(2) 異なる 2 つの負の解をもつ。

(3) 正の解と負の解を 1 つずつもつ。　（Point 3-8-1）

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 39　a を定数とし、$f(x)=x^2-2ax+a+2$ とする。

(1) $a=3$ のとき、$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を $m(a)$ とするとき、$m(a)$ を a の式で表せ。

(3) $0 \leqq x \leqq 2$ を満たすすべての x について $f(x)>0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

（Point 3-4-2）

解説編（見本）

問 14

$f(x) = x^2 - 2ax + a$ とする。$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を $m(a)$ とする。

(1) $m(a)$ を a の式で表せ。

(2) $m(a)$ の最大値と、そのときの a の値を求めよ。

問題を見て思うこと

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + a$ より、軸は $x = a$ で**文字入り**。定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ は固定。▶ Point 3-4-3

→ 軸が定義域の**左外・内・右外**のどこかで場合分け（最小なら 3 通り）：$a < 0$，$0 \leqq a \leqq 2$，$2 < a$。

→ (2) $m(a)$ は a の関数。$m(a)$ の**グラフをかいて**、一番高いところを読む。

解答

(1)　$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + a$ より、軸は直線 $x = a$、頂点は $(a,\ -a^2 + a)$。

(i) $a < 0$ のとき（軸が定義域の左外）：定義域で f は増加するので、$x = 0$ で最小。$m(a) = f(0) = a$。

(ii) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき（軸が定義域の中）：頂点で最小。$m(a) = -a^2 + a$。

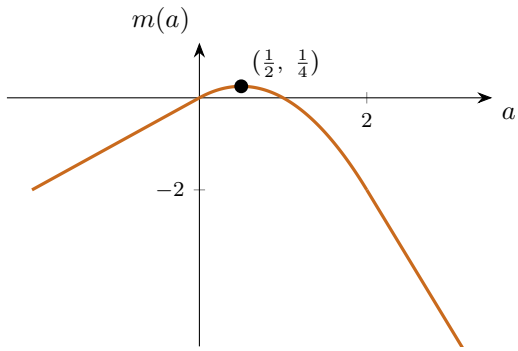
(iii) $a > 2$ のとき（軸が定義域の右外）：定義域で f は減少するので、$x = 2$ で最小。$m(a) = f(2) = 4 - 4a + a = 4 - 3a$。

したがって

$$m(a) = \begin{cases} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{(a < 0)} \\ \boldsymbol{-a^2 + a} & \boldsymbol{(0 \leqq a \leqq 2)} \\ \boldsymbol{4 - 3a} & \boldsymbol{(a > 2)} \end{cases}$$

(2)　$m(a)$ のグラフは下図のようになる。$0 \leqq a \leqq 2$ では $m(a) = -\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$ で、$a < 0$ では $m(a) < 0$、$a > 2$ では $m(a) < -2$ である。よって最大値は

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}} \quad \left(a = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \text{ のとき}\right)$$



$m(a)$ のグラフ：最高点は $a = \dfrac{1}{2}$

方針の候補

○ 軸 $x = a$ が定義域の**左外・内・右外**で 3 通りに分ける。 ▶ Point 3-4-3

○ (2) は $m(a)$ の**グラフをかいて**一番高いところを読む。 ▶ Point 3-4-3

× 頂点の値 $-a^2 + a$ を、a の値にかかわらず答えにする ･･･ 頂点が使えるのは軸が定義域の**中**にあるときだけ。

× 場合分けを $a < 0$ と $a \geqq 0$ の 2 通りで済ませる ･･･ 軸が定義域の**右外**に出る場合 $(a > 2)$ が残る。

この問題で身につくこと

・軸が動くときは、軸が定義域の**左外・内・右外**で場合分け（最小）。
・場合分けの境目は**定義域の端**（ここでは $a = 0,\ 2$）。
・各場合で**どの x で最小か**を決め、その値を a で表す。
・$m(a)$ は a の関数。**グラフ**をかくと最高点・最低点が読める。
・境目で**値がつながる**かを確かめると検算になる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 3-4-3 軸が動くときたら・・・
定義域が固定で，軸に文字が入っているとき･･･
→ 軸が定義域の左外・内・右外のどこにあるかで場合分け！（最小なら 3 通り）
※ 同じ関数で**最大**を聞かれたら，境界は定義域の**中央**になる。
※ 頂点の y 座標に a が残るかどうかで，真ん中の場合の形が変わる。
※ さらに「$m(a)$ **の最小値を求めよ**」と問われることもある。$m(a)$ のグラフをかいて，その一番低いところを読めばよい。

Point 3-4-2 定義域に制限があるときたら・・・
→ 平方完成して，**定義域を実線で図示**せよ！　そのうえで，頂点と**定義域の端**での y の値を比べる。
$a > 0$，定義域 $s \leqq x \leqq t$，軸 $x = p$ のとき

- **(i)【最小】**は，軸と定義域の両端を比べて 3 通り
  $p < s$ なら $x = s$，　$s \leqq p \leqq t$ なら $x = p$（頂点），　$t < p$ なら $x = t$
- **(ii)【最大】**は，軸と定義域の中央 $\left(= \dfrac{s+t}{2}\right)$ を比べて 3 通り
  軸が中央より左なら $x = t$，　ちょうど中央なら $x = s$ と $x = t$ の**両方**，　中央より右なら $x = s$

最小と最大で，場合分けの境界が異なる！

※ $a < 0$ のときは最大と最小が入れかわる。2 乗の係数の符号を必ず先に確認すること。

問 30

方程式 $|x^2-4x|=k$ の実数解の個数を、定数 k の値によって分類せよ。

問題を見て思うこと

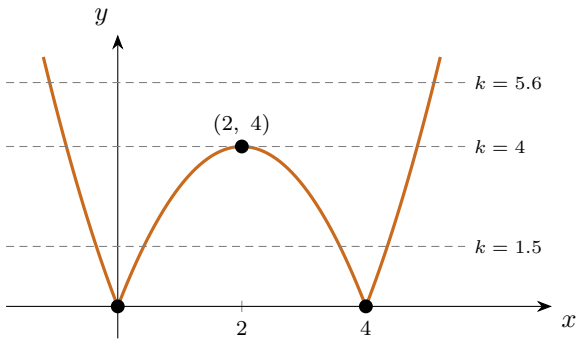
方程式の実数解は、**グラフの共有点の x 座標**。$f(x)=k$ なら、曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$。**曲線は固定**して、直線を上下に動かす。 ▶Point 3-7-2

→ 曲線は $y=|x^2-4x|$。$y=(x-2)^2-4$ の x 軸より下を折り返したもの。 ▶Point 3-7-1

→ 折り返しの頂点 $(2,\ 4)$ が、個数の変わる**境目**になる。$k=0$ と $k=4$ が境目。

解答

曲線 $y=|x^2-4x|$ と直線 $y=k$ の共有点の個数を調べる。$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$ は x 軸と $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$ で交わり、x 軸より下の $0<x<4$ の部分を折り返すと、頂点が $(2,\ 4)$ の山ができる。



直線 $y=k$ を上下に動かす（$k=1.5$ は 4 点、$k=4$ は 3 点、$k=5.6$ は 2 点）

直線 $y=k$ を下から上へ動かすと、共有点の個数は次のように変わる。

$\boldsymbol{k<0}$	**0 個**	
$\boldsymbol{k=0}$	**2 個**	$\boldsymbol{(x=0,\ 4)}$
$\boldsymbol{0<k<4}$	**4 個**	
$\boldsymbol{k=4}$	**3 個**	(山の頂点で接する)
$\boldsymbol{k>4}$	**2 個**	

方針の候補

○ 曲線 $y=|x^2-4x|$ を**固定**し、直線 $y=k$ を動かす（定数分離）。 ▶Point 3-7-2

△ 絶対値を外して、$x^2-4x=k$ と $x^2-4x=-k$ の**判別式**で個数を数える ··· うまくいく。ただし、2 つの方程式の解が重なる場合（$k=0$）を落としやすい。

× $k=4$ のとき 4 個とする ··· 山の頂点で接するので、折り返した側は 1 **個**。合計 3 個。

× $k<0$ のとき 2 個とする ··· $|\ |\geqq 0$ なので、$k<0$ では共有点が**ない**。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 絶対値を外して判別式で数える道

$|x^2-4x|=k$ は $k \geqq 0$ のとき $x^2-4x=k$ または $x^2-4x=-k$。前者は $D=16+4k>0$ で常に異なる 2 解。後者は $D=16-4k$ で、$k<4$ なら 2 解、$k=4$ なら重解 $x=2$、$k>4$ なら解なし。$k=0$ では両者の解が $x=0,\ 4$ で重なる。よって $k<0$：0 個、$k=0$：2 個、$0<k<4$：4 個、$k=4$：3 個、$k>4$：2 個。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・方程式の実数解 ＝ **グラフの共有点の x 座標**。
・$f(x)=k$ なら、曲線を**固定**して、直線 $y=k$ を**上下に動かす**。
・個数が変わる**境目**は、頂点・折れ点・端など**グラフの特徴点**の高さ。
・ちょうど境目のとき（$k=0,\ 4$）は、**個数が変わる**。別に数える。
・絶対値は 0 以上。$k<0$ では**解がない**。
・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 3-7-2 方程式の実数解とグラフ～定数分離・直線分離～

定数分離は，方程式の解の個数（配置問題とも。詳しくは Point 3-8-1 以降で扱う）を考えるうえでの頻出手法！

方程式の実数解は，$y=$(左辺) と $y=$(右辺) のグラフの共有点の x 座標として読みかえられる。

- $f(x)=0$ の実数解 $\iff$ 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=0$（x 軸）の共有点の x 座標
- $f(x)=k$ の実数解 $\iff$ 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の x 座標 **（定数分離）**
- $f(x)=ax$ の実数解 $\iff$ 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ の共有点の x 座標 **（直線分離）**

一般的にまとめると，$f(x)=g(x)$ の実数解 $\iff$ 2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標。

比べやすいグラフで比べよう！

- ① 一方の曲線は**固定したまま**，もう一方の直線を動かして交点の変化を追う
  → 定数分離／直線分離
- ② sin と log など，**異なる関数を左辺と右辺に分ける**
  （sin・log は数学 II で学ぶ。いまは $y=k$ の定数分離だけおさえればよい）

Point 3-7-1 絶対値のグラフときたら ･･･

（本文は問 29 参照）

問 35

2 次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ について、次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる 2 つの正の解をもつ。

(2) 異なる 2 つの負の解をもつ。

(3) 正の解と負の解を 1 つずつもつ。

問題を見て思うこと

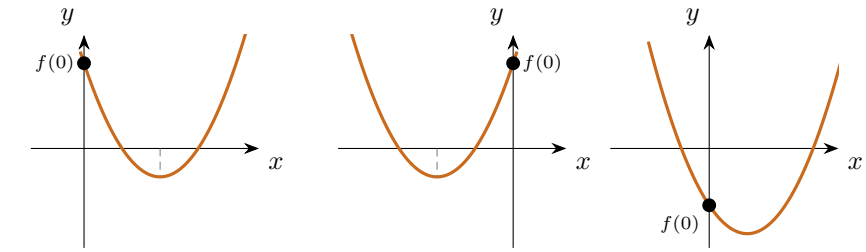
解の個数問題は、グラフを描いて**判別式・軸の位置・端点の符号**の 3 条件で表す。▶Point 3-8-1

→ $f(x)=x^2-2ax+a+2$ とおく。軸は $x=a$、$f(0)=a+2$、$\dfrac{D}{4}=a^2-a-2=(a-2)(a+1)$。

→ (1)(2) は 3 条件がそろう。(3) は $f(0)<0$ **だけ**で足りる。下に凸で y 切片が負なら、グラフは x 軸と、正の側と負の側で 1 点ずつ交わる。

解答

$f(x)=x^2-2ax+a+2=(x-a)^2-a^2+a+2$ とおく。軸は直線 $x=a$、$f(0)=a+2$、$\dfrac{D}{4}=a^2-a-2=(a-2)(a+1)$ である。



(1) $D>0$, 軸 >0, $f(0)>0$　(2) $D>0$, 軸 <0, $f(0)>0$　(3) $f(0)<0$ だけ

下に凸の放物線 $y=f(x)$ と x 軸の交わり方（どれも一例）

(1)　異なる 2 つの正の解をもつ条件は、次の 3 つが同時に成り立つことである。

$$\frac{D}{4}>0\ (a<-1,\ 2<a),\qquad \text{軸 } a>0,\qquad f(0)=a+2>0\ (a>-2)$$

共通範囲は $\boldsymbol{a>2}$。

(2)　異なる 2 つの負の解をもつ条件は

$$\frac{D}{4}>0\ (a<-1,\ 2<a),\qquad \text{軸 } a<0,\qquad f(0)=a+2>0\ (a>-2)$$

共通範囲は $\boldsymbol{-2<a<-1}$。

(3)　正の解と負の解を 1 つずつもつ条件は $f(0)<0$、すなわち $a+2<0$ より $\boldsymbol{a<-2}$。（このとき $\dfrac{D}{4}=(a-2)(a+1)>0$ は自動的に成り立つ。）

方針の候補

○ 条件を**判別式・軸・端点の符号**の 3 つで書き、**同時に**満たす範囲をとる。 ▶ **Point 3-8-1**

○ (3) は $f(0) < 0$ **だけ**で十分。条件を増やさない。

× (1) で軸の条件 $a > 0$ を落とす ··· $D > 0$ と $f(0) > 0$ だけでは $a < -1$ の側（$-2 < a < -1$）も入り、(2) の答えが混ざる。

× (1) で $D \geqq 0$ とする ···「**異なる** 2 つ」なので $D > 0$。等号は入らない。

この問題で身につくこと

・解の個数・符号の問題は、グラフを描いて**判別式・軸の位置・端点の符号**で表す。
・3 つは**同時に成り立つ**条件。どれか落とすと答えが変わる。
・「異なる」なら $D > 0$、「重解を含む」なら $D \geqq 0$。
・正と負の解を 1 つずつもつなら、$f(0) < 0$ **だけ**（下に凸のとき）。
・余分な条件を足しても、**必要十分でなくなる**。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 3-8-1 解の個数問題ときたら・・・
→ グラフを描いて，**判別式・軸の位置・端点の符号**の 3 つで表現せよ！
この 3 つは**同時に成り立つべき条件**である。どれか 1 つでも落とすと答えが変わり，逆に余分な条件を足しても間違いになる。**必要十分**になっているかを必ず確かめること。
※ まずは**因数分解できないか**を確認すること。定数を含んでいると気づきにくいが，1 解が確定すれば一気に簡単になる。
例：$x^2 + (a+1)x + a = 0 \iff (x+a)(x+1) = 0$ なら，解は $-a$ と -1 と分かってしまう。

Point 3-6-2 判別式
（本文は問 23 参照）

問 39

a を定数とし、$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$ とする。
(1) $a = 3$ のとき、$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。
(2) $0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を $m(a)$ とするとき、$m(a)$ を a の式で表せ。
(3) $0 \leqq x \leqq 2$ を満たすすべての x について $f(x) > 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

問題を見て思うこと

「ある区間でつねに $f(x) > 0$」→ その区間での**最小値が正**。(2) で求めた $m(a)$ を使う。
▶ Point 3-4-2
→ (1) は $a = 3$ を代入して軸 $x = 3$ が定義域の右にあることを確かめる練習。(2) はその一般化。
→ (3) は場合ごとに $m(a) > 0$ を解き、場合の範囲との**共通部分**をとって、最後に**合わせる**。

解答

(1)　$a = 3$ のとき $f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$。軸 $x = 3$ は定義域の右で、f は減少する。最小値は $f(2) = 4 - 12 + 5 = \boldsymbol{-3}$。

(2)　$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + a + 2$。$f(0) = a + 2$,　$f(2) = 6 - 3a$。

$$\boldsymbol{m(a) = \begin{cases} a + 2 & (a < 0) \\ -a^2 + a + 2 & (0 \leqq a \leqq 2) \\ 6 - 3a & (a > 2) \end{cases}}$$

(3)　$m(a) > 0$ を場合ごとに解く。

- $a < 0$：$a + 2 > 0$ より $a > -2$。よって $-2 < a < 0$。
- $0 \leqq a \leqq 2$：$-a^2 + a + 2 > 0$、すなわち $(a-2)(a+1) < 0$ より $-1 < a < 2$。よって $0 \leqq a < 2$。
- $a > 2$：$6 - 3a > 0$ より $a < 2$。$a > 2$ に合わず、なし。

合わせて $\boldsymbol{-2 < a < 2}$。

方針の候補

○「つねに $f(x) > 0$」は「**最小値** > 0」と読みかえる。▶ Point 3-4-2
○ 場合ごとの結果に、**その場合の範囲との共通部分**をとってから合わせる。
△ 端点 $f(0) > 0$,　$f(2) > 0$ から範囲を絞り、あとで軸の場合を確かめる ··· うまくいく。「十分か」を確かめる手間がかかる。
× (3) で場合の範囲を考えず、各場合の不等式の解（$a > -2$、$-1 < a < 2$、$a < 2$）をそのまま合わせる ··· 範囲の外の a を含めてしまう。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 定数分離の道

$f(x) > 0$ を $a(1-2x) > -(x^2+2)$ と変形する。$x = \dfrac{1}{2}$ では $0 > -\dfrac{9}{4}$ で成り立つ。$0 \leqq x < \dfrac{1}{2}$ では $a > -\dfrac{x^2+2}{1-2x}$、右辺は $x = 0$ で最大 -2 だから $a > -2$。$\dfrac{1}{2} < x \leqq 2$ では $a < \dfrac{x^2+2}{2x-1}$、右辺は $x = 2$ で最小 2 だから $a < 2$。→ 同じ結論 $-2 < a < 2$ に到達する。ただし右辺の増減を調べる手間が大きい。

△ 端点の条件から絞る道

必要条件：$f(0) = a+2 > 0$，$f(2) = 6-3a > 0$ より $-2 < a < 2$。逆に $-2 < a < 0$ なら軸が定義域の左にあり、最小値は $f(0) > 0$ で足りる。$0 \leqq a < 2$ なら頂点の値 $(2-a)(a+1)$ が正。したがって十分でもある。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・「区間でつねに $f(x) > 0$」＝「その区間での**最小値が正**」。
・軸が動くので、(2) の**場合分け**がそのまま (3) の骨組みになる。
・各場合の解は、その場合の範囲との**共通部分**をとってから合わせる。
・小問どうしは**つながっている**。(2) を使わずに (3) だけを解くと、手間が増える。
・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 3-4-2 定義域に制限があるときたら・・・

→ 平方完成して，**定義域を実線で図示**せよ！　そのうえで，頂点と**定義域の端**での y の値を比べる。

$a > 0$，定義域 $s \leqq x \leqq t$，軸 $x = p$ のとき

- **(i)【最小】**は，軸と定義域の両端を比べて 3 通り
  $p < s$ なら $x = s$，　$s \leqq p \leqq t$ なら $x = p$（頂点），　$t < p$ なら $x = t$
- **(ii)【最大】**は，軸と定義域の中央 $\left(= \dfrac{s+t}{2}\right)$ を比べて 3 通り
  軸が中央より左なら $x = t$，　ちょうど中央なら $x = s$ と $x = t$ の**両方**，　中央より右なら $x = s$

最小と最大で，場合分けの境界が異なる！

※ $a < 0$ のときは最大と最小が入れかわる。2 乗の係数の符号を必ず先に確認すること。

Point 3-4-1 2 次関数の最大・最小（定義域に制限なし）

（本文は問 10 参照）