この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学Ⅰ A 第 2 章「集合と命題」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 8　実数 x についての条件 $p,\ q,\ r$ を

$$p:\ -1 < x < 3, \qquad q:\ |x-1| < 2, \qquad r:\ -2 \leqq x \leqq 4$$

とする。

(1) $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ の真偽をそれぞれ答えよ。

(2) $p \Rightarrow r$ と $r \Rightarrow p$ の真偽をそれぞれ答えよ。

(3) 定数 a について、条件 $s:\ x > a$ とする。$p \Rightarrow s$ が真となる a の範囲を求めよ。

（Point 2-1-7）

問 16　次の命題を、対偶を考えて証明せよ。

(1) 整数 $a,\ b$ について、$a+b$ が奇数ならば、ab は偶数である。

(2) 実数 $a,\ b$ について、$a+b$ が無理数ならば、$a,\ b$ の少なくとも一方は無理数である。

（Point 2-1-12）

問 22　次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2) (1) を用いて、$\sqrt{2}+1$ が無理数であることを証明せよ。　（Point 2-2-5）

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 31　次の問いに答えよ。ただし、$\sqrt{2},\ \sqrt{3}$ が無理数であることは用いてよい。

(1) $\sqrt{6}$ が無理数であることを証明せよ。

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

(3) $a,\ b$ を有理数とする。$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ が有理数ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。

（Point 2-2-5）

解説編（見本）

問 8

実数 x についての条件 $p,\ q,\ r$ を

$$p:\ -1<x<3, \qquad q:\ |x-1|<2, \qquad r:\ -2 \leqq x \leqq 4$$

とする。

(1) $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ の真偽をそれぞれ答えよ。

(2) $p \Rightarrow r$ と $r \Rightarrow p$ の真偽をそれぞれ答えよ。

(3) 定数 a について、条件 $s:\ x>a$ とする。$p \Rightarrow s$ が真となる a の範囲を求めよ。

問題を見て思うこと

条件を満たすもの全体の集合を $P,\ Q,\ R$ とおくと、$p \Rightarrow q$ が真 $\Leftrightarrow P \subset Q$。 ▶Point 2-1-7

→ まず $|x-1|<2$ を $-2<x-1<2$、すなわち $-1<x<3$ と直す。→ $P=Q$。

→ (2) $P=\{x \mid -1<x<3\}$ と $R=\{x \mid -2 \leqq x \leqq 4\}$ を数直線に並べる。→ P が R の内側にある。

→ (3) $S=\{x \mid x>a\}$ の左端 a が、P の左端 -1 より左（または一致）なら $P \subset S$。**端を含むかどうか**に注意。

解答

$P=\{x \mid -1<x<3\}$，$R=\{x \mid -2 \leqq x \leqq 4\}$ である。また $|x-1|<2$ は $-2<x-1<2$、すなわち $-1<x<3$ と同じだから、$Q=\{x \mid -1<x<3\}=P$ である。

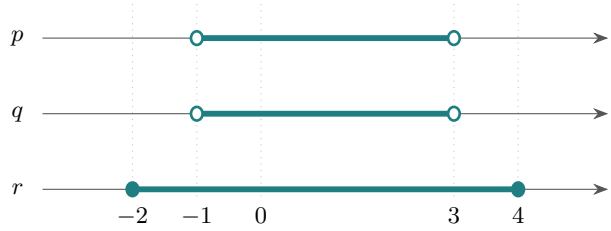


図　$p,\ q,\ r$ を満たす x の範囲（白丸は端を含まない、黒丸は含む）

(1)　$P=Q$ より、$p \Rightarrow q$ も $q \Rightarrow p$ も**真**（$p \Leftrightarrow q$）。

(2)　$P \subset R$ であるから $p \Rightarrow r$ は**真**。$R \not\subset P$（たとえば $x=4$ は r を満たすが p を満たさない）から、$r \Rightarrow p$ は**偽**。

(3)　$S=\{x \mid x>a\}$ とおく。$p \Rightarrow s$ が真となるのは $P \subset S$ のときである。P のすべての x が $x>a$ を満たすには、P の左端 -1 が a 以上であればよい（P は -1 を含まないので、$a=-1$ でもよい）。よって

$$\boldsymbol{a \leqq -1}$$

方針の候補

○ 条件を**集合 $P,\ Q,\ R$ に直し**、$P \subset Q$ かどうかで真偽を判断する。 **▶Point 2-1-7**

○ 範囲の包含は**数直線**で確かめ、端が含まれるかを見る。

× (3) を $a < -1$ とする $\cdots$ $a = -1$ のとき $S = \{x \mid x > -1\}$ は $P = \{x \mid -1 < x < 3\}$ を含む。**端点の等号を落とす**と範囲が 1 点欠ける。

× (1) で q の絶対値をそのままにして比べる $\cdots$ 絶対値のままでは範囲の大小が見えない。**不等式に直してから**比べる。

この問題で身につくこと

・条件は**集合に直す**。$p \Rightarrow q$ が真 $\Leftrightarrow$ $P \subset Q$。
・$|x-1| < 2$ は $-2 < x - 1 < 2$ と**同じ**。絶対値は不等式に直す。
・包含関係は**数直線**で確かめる。白丸と黒丸（端を含むか）に注意。
・端が一致する場合は、**含む・含まないを両方確かめて**から等号を決める。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 2-1-7 命題と条件，条件と集合
命題 $\cdots$ 正しいか正しくないか（真偽）がはっきりする事柄を述べた文や式のこと。
以下、2 つの条件 $p,\ q$ について、
① 命題 $p \Rightarrow q$（p ならば q）　p が**仮定**、q が**結論**。
② $p \Leftrightarrow q$ は「$p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$」を表す。
③ p は満たすが q は満たさない例（**反例**という）があると、$p \Rightarrow q$ は偽。
また、2 つの条件 $p,\ q$ を満たすもの全体の集合を、それぞれ $P,\ Q$ とすると、次のことが成り立つ。

$$「p \Rightarrow q \text{ が真}」 \Leftrightarrow P \subset Q$$
$$「q \Rightarrow p \text{ が真}」 \Leftrightarrow Q \subset P$$
$$「p \Leftrightarrow q \text{ が真}」 \Leftrightarrow P = Q$$

問 16

次の命題を、対偶を考えて証明せよ。

(1) 整数 $a,\ b$ について、$a+b$ が奇数ならば、ab は偶数である。

(2) 実数 $a,\ b$ について、$a+b$ が無理数ならば、$a,\ b$ の少なくとも一方は無理数である。

問題を見て思うこと

対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ が真なら、もとの命題も真。 ▶Point 2-1-12

→ (1) 結論は「ab は偶数」。その否定「ab は奇数」からスタートした方が、$a,\ b$ の形を決めやすい。 ▶Point 2-2-3

→ (2) 結論は「少なくとも一方は無理数」。否定は「**どちらも無理数でない**」、つまり「ともに有理数」。 ▶Point 2-2-6

→ 仮定が「無理数である」のに対し、対偶の出発点は「有理数である」。**扱いやすい形**になる。

解答

(1)　対偶「ab が奇数ならば、$a+b$ は偶数である」を示す。

ab が奇数であるとする。a が偶数ならば ab も偶数になって不適であるから、a は奇数。同様に b も奇数である。そこで $a=2k+1,\ b=2l+1$（$k,\ l$ は整数）とおくと

$$a+b=2k+2l+2=2(k+l+1)$$

となり偶数である。よって対偶が示されたから、もとの命題も成り立つ。

(2)　対偶「$a,\ b$ がともに有理数ならば、$a+b$ は有理数である」を示す。

$a,\ b$ がともに有理数であるとする。整数 $p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2$（$p_1 \neq 0,\ p_2 \neq 0$）を用いて $a=\dfrac{q_1}{p_1},\ b=\dfrac{q_2}{p_2}$ とおくと

$$a+b=\frac{q_1p_2+q_2p_1}{p_1p_2}$$

であり、分子は整数、分母は 0 でない整数であるから $a+b$ は有理数である。よって対偶が示されたから、もとの命題も成り立つ。

方針の候補

○ 結論が「偶数」「少なくとも一方」の形のとき、**対偶**にして結論の否定から出発する。▶Point 2-1-12

△ 背理法で、「p かつ $\overline{q}$」と仮定して矛盾を導く ··· 証明できる。ただし矛盾が出る場所を探しながら進む分、対偶より見通しがやや悪い。

× 逆「ab が偶数ならば $a+b$ は奇数」を示す ··· **逆を示しても元の命題の証明にならない**（逆は偽。$a=b=2$ など）。

× (1) で $a=1,\ b=2$ など具体例で確かめて済ませる ··· 具体例は**証明にならない**。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 背理法で示す道

(1) $a+b$ が奇数かつ ab が奇数であると仮定する。ab が奇数ならば a, b はともに奇数なので、$a+b$ は偶数となり、$a+b$ が奇数であることに反する。

(2) $a+b$ が無理数かつ a, b がともに有理数と仮定する。有理数どうしの和は有理数だから、$a+b$ が無理数であることに反する。→ どちらも同じ結論に到達する。

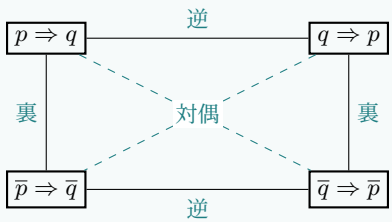
この問題で身につくこと

・結論の否定の方が**扱いやすい形**になるとき、対偶が有効。
・「少なくとも一方は〜」の否定は**「どちらも〜でない」**（問 12）。
・対偶による証明は、**ゴールが最初から決まっている**（問 25 でもう一度）。
・偶数・奇数は $2k$, $2k+1$ **とおく**と式で扱える。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 2-1-12 逆・対偶・裏と真偽

命題 $p \Rightarrow q$ に対し、
① $q \Rightarrow p$ を**逆**
② $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を**対偶**
③ $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ を**裏**　という。
・命題の真偽とその対偶の真偽は一致**する**。
・命題の真偽とその逆、裏の真偽は一致**するとは限らない**。



Point 2-2-3【参考】整数を余りで分類して表す

整数 n は、例えば次のように場合分けして表すことができる（k は整数）。
① $2k$, $2k+1$　（偶数、奇数 ← 2 で割った余りが 0, 1）
② $3k$, $3k+1$, $3k+2$　（3 で割った余りが 0, 1, 2）
③ pk, $pk+1$, $pk+2$, …, $pk+(p-1)$　（p で割った余りが 0, 1, 2, …, $p-1$）
①も②も③も、それぞれのいずれかの場合分けの中に、すべての整数が余すことなく入っている！
もちろん ① は $2k$, $2k-1$、② は $3k$, $3k \pm 1$ などでもよい！ 様々な形で表せる。詳しくは数学 A の整数の分野で学習する。

Point 2-2-6【重要】有理数（$\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$）の置き方

① そのまま r（r は有理数）とおく。
② 正の有理数 → $\frac{q}{p}$（p, q は**互いに素な自然数**）とおく。
③ 負を含む一般の有理数 → $\frac{q}{p}$（p, q は互いに素な整数、$p \neq 0$）とおく。

（より厳しく置くのであれば片方は自然数にする。どのみち分母は 0 でないから、p がおすすめ。）

問 22

次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2) (1) を用いて、$\sqrt{2}+1$ が無理数であることを証明せよ。

問題を見て思うこと

無理数であることの証明ときたら、**背理法**を疑え。 ▶Point 2-2-5

→ 無理数は「有理数でない数」。→「有理数だ」と仮定して矛盾を出す。

→ 正の有理数は**互いに素な自然数 $p,\ q$ を用いて** $\dfrac{q}{p}$ とおく。 ▶Point 2-2-6

→ 両辺を 2 乗して整数の式にし、**偶数・奇数**で追う。最後に出る矛盾は「互いに素」。 ▶Point 2-2-3

解答

(1)　$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。$\sqrt{2}>0$ であるから、互いに素な自然数 $p,\ q$ を用いて

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$$

とおける。両辺を 2 乗して整理すると

$$q^2=2p^2 \qquad \cdots ①$$

となり、q^2 は偶数である。q が奇数とすると、$q=2k+1$ のとき $q^2=2(2k^2+2k)+1$ は奇数となって不適であるから、q は偶数。そこで $q=2r$（r は自然数）とおくと、① より $4r^2=2p^2$，すなわち

$$p^2=2r^2$$

となり、同様に p も偶数である。すると $p,\ q$ がともに偶数となり、$p,\ q$ が互いに素であることに反する。よって $\sqrt{2}$ は無理数である。

(2)　$\sqrt{2}+1$ が有理数であると仮定し、その値を r とおく。すると $\sqrt{2}=r-1$ となり、有理数どうしの差 $r-1$ は有理数であるから、$\sqrt{2}$ が有理数になってしまう。これは (1) に反する。よって $\sqrt{2}+1$ は無理数である。

方針の候補

○ 無理数の証明は**背理法**。有理数と仮定し、$\dfrac{q}{p}$ と**互いに素**におく。 ▶Point 2-2-5

○ (2) は有理数を**そのまま r とおき**、(1) に帰着させる。 ▶Point 2-2-6

× $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ と計算を続けて、循環しないことを確かめる … どこまで計算しても**有限回の計算では証明にならない**。

× $p,\ q$ を**互いに素としないで** $\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ とおく … 最後に「ともに偶数」となっても、約分できるだけで**矛盾にならない**。

この問題で身につくこと

・無理数の証明は**背理法**：有理数と仮定して矛盾を導く。
・有理数は**互いに素な整数の比** $\frac{q}{p}$ とおく。矛盾は**「互いに素」と食い違う**形で出る。
・2 乗して**偶奇**で追う。奇数なら 2 乗も奇数（対偶）を使う。
・(2) のように、すでに示した無理数を**足がかり**にして次を示す。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 2-2-5 無理数であることの証明
無理数であることの証明ときたら・・・
→ **背理法**を疑え！

Point 2-2-6【重要】有理数（$\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$）の置き方
（本文は問 16 参照）

Point 2-2-3【参考】整数を余りで分類して表す
（本文は問 16 参照）

問 31

次の問いに答えよ。ただし、$\sqrt{2},\ \sqrt{3}$ が無理数であることは用いてよい。

(1) $\sqrt{6}$ が無理数であることを証明せよ。

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

(3) $a,\ b$ を有理数とする。$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ が有理数ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。

問題を見て思うこと

無理数であることの証明ときたら、**背理法**。　▶Point 2-2-5

→ 有理数は**互いに素な自然数 $p,\ q$ の $\dfrac{q}{p}$**、またはそのまま r とおく。　▶Point 2-2-6

→ (1) $\sqrt{6}=\dfrac{q}{p}$ とおくと $q^2=6p^2$。**偶奇**で追える（$\sqrt{2}$ と同じ型）。

→ (2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$ の両辺を 2 乗すると $\sqrt{6}$ が出る。→ (1) に帰着。

→ (3) $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=r$ の両辺を 2 乗すると $2ab\sqrt{6}$ が出る。→ $ab\neq 0$ なら $\sqrt{6}$ が有理数になって矛盾。→ 残りは $ab=0$ の場合。

解答

(1)　$\sqrt{6}$ が有理数であると仮定する。互いに素な自然数 $p,\ q$ を用いて $\sqrt{6}=\dfrac{q}{p}$ とおくと

$$q^2=6p^2 \qquad \cdots ①$$

q^2 は偶数だから q は偶数。$q=2r$（r は自然数）とおくと、① より $4r^2=6p^2$，すなわち $2r^2=3p^2$。左辺は偶数だから $3p^2$ は偶数、よって p^2 は偶数で p も偶数。すると $p,\ q$ がともに偶数となり、互いに素であることに反する。よって $\sqrt{6}$ は無理数である。

(2)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数であると仮定し、その値を r とおく。両辺を 2 乗すると

$$5+2\sqrt{6}=r^2 \qquad \text{すなわち} \qquad \sqrt{6}=\frac{r^2-5}{2}$$

右辺は有理数であるから $\sqrt{6}$ が有理数となり、(1) に反する。よって $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

(3)　$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=r$（r は有理数）とおく。両辺を 2 乗すると

$$2a^2+3b^2+2ab\sqrt{6}=r^2 \qquad \cdots ②$$

(i) $ab\neq 0$ と仮定する。② より $\sqrt{6}=\dfrac{r^2-2a^2-3b^2}{2ab}$ となり、右辺は有理数であるから $\sqrt{6}$ が有理数となって (1) に反する。よって $ab=0$。

(ii) $a=0$ のとき、$b\sqrt{3}=r$。$b\neq 0$ とすると $\sqrt{3}=\dfrac{r}{b}$ が有理数となり、$\sqrt{3}$ が無理数であることに反する。よって $b=0$。

(iii) $b=0$ のとき、$a\sqrt{2}=r$。$a\neq 0$ とすると $\sqrt{2}=\dfrac{r}{a}$ が有理数となり、$\sqrt{2}$ が無理数であることに反する。よって $a=0$。

(i)〜(iii) より、いずれの場合も $a=b=0$ である。

方針の候補

○ 和の無理数性は **2 乗して $\sqrt{6}$ を作り**、(1) に帰着させる。 **▶Point 2-2-5**

○ (3) は 2 乗して現れる $2ab\sqrt{6}$ の係数 ab で**場合分け**（$ab \neq 0$ と $ab = 0$）。 **▶Point 2-2-6**

△ (2) を $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$ から示す $\cdots$ うまくいく。発想の難度は高い（別解を参照）。

×「$\sqrt{2}$ も $\sqrt{3}$ も無理数だから、その和も無理数」とする $\cdots$ **無理数どうしの和は無理数とは限らない**（$\sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = 0$）。

× (3) で $ab = 0$ の場合を調べずに「$a = b = 0$」とする $\cdots$ $ab \neq 0$ を否定しただけでは、$a = 0$ や $b = 0$ の一方だけが 0 の場合が残っている。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ を作って足し引きする道

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3} = r$（有理数）と仮定する。$r \neq 0$ であり、$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 3-2 = 1$ より $\sqrt{3}-\sqrt{2} = \dfrac{1}{r}$ も有理数。すると $\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$ は有理数となり、$\sqrt{3}$ が無理数であることに反する。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・無理数の和・積は、**2 乗して**平方根を 1 つにまとめる（$\sqrt{6}$ を作る）と、既知の無理数に帰着しやすい。
・無理数どうしの和・積は**無理数とは限らない**。有理数との和・積（問 23）とは扱いが違う。
・$ab = 0$ の場合を**別に**調べる。一方が 0 のときは、**残りの一方が 0 になること**を問 22・問 24 で示した無理数性から導く。
・和の無理数性は、2 乗する道と、積が 1 になる組を作る道の、どちらでも示せる。どれか 1 つしか正解でない、ということはない。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 2-2-5 無理数であることの証明
無理数であることの証明ときたら・・・
→ **背理法**を疑え！

Point 2-2-6【重要】有理数（$\dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$）の置き方
（本文は問 16 参照）