この見本について

高校数学の俯瞰 －演習セット－　数学Ⅰ A 第 1 章「数と式」

これは**見本**です。実際の商品から **4 問**だけを抜き出して、問題と解説をそのまま載せています。文字を小さくしたり、解説を短くしたりはしていません。

選んだ 4 問

- 前半の 3 問 … **方針の候補が多い問題**や、**別解を複数紹介できる問題**を選びました。
- 最後の 1 問 … 章末の**【入試対策　実戦 Point 活用演習】**からです。入試レベルで、(1)(2)(3) の誘導が付いています。

商品の中身

- ①この教材のあつかいについて　②目次　③問題編　④答え一覧　⑤解説編　の順に入っています。
- 解説は**「問題を見て思うこと」→「解答」→「方針の候補（○△ ×）」→「別の方針でも解いてみる」→「この問題で身につくこと」→「使った Point」**の順です。
- 使った Point は**本編の該当箇所をそのまま載せている**ので、PDF 1 つで完結します。

※ 見本は抜粋なので、「本文は問○参照」と書いてある問が、この見本に入っていないことがあります。商品版にはすべて収録されています。

※ 商品版には全ページに購入者のお名前と注文 ID が入ります。見本には入っていません。

※ 答え一覧は商品版にあります。見本では解説の中に答えが入っています。

問題編（見本）

問 4　**【発展】**次の問いに答えよ。

(1) 等式 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$ が成り立つことを、右辺を展開して示せ。

(2) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ を因数分解せよ。

(3) $a=2025,\ b=2026,\ c=2027$ のとき、$a^3+b^3+c^3-3abc$ の値を求めよ。　（Point 1-1-2）

問 9　$x+y=4,\ xy=1$ のとき、次の値を求めよ。

(1) x^2+y^2　(2) x^3+y^3　(3) x^4+y^4

(4) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　(5) $x>y$ のとき $x-y$　（Point 1-2-1）

問 13　$x+\dfrac{1}{x}=3$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$　(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$

(4) $x>1$ のとき $x-\dfrac{1}{x}$　（Point 1-2-2）

【入試対策　実戦 Point 活用演習】

章末に置いている入試レベルの 6 問から、1 問を見本として載せます。

問 27　$x=\sqrt{3}+\sqrt{2},\ y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ とする。

(1) $x+y,\ xy,\ x^2+y^2$ の値を求めよ。

(2) x^4+y^4 の値を求めよ。

(3) x^4 の整数部分と小数部分を求めよ。　（Point 1-2-1）

解説編（見本）

問 4

【発展】次の問いに答えよ。

(1) 等式 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$ が成り立つことを、右辺を展開して示せ。

(2) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ を因数分解せよ。

(3) $a=2025$，$b=2026$，$c=2027$ のとき、$a^3+b^3+c^3-3abc$ の値を求めよ。

問題を見て思うこと

手札は発展の公式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$。**教科書にはない**ので、使う前に (1) で示しておく。

▶ **Point 1-1-2**

→ (1) 右辺は $(x+y+z)$ に 2 つの式を掛けたもの。$(x+y+z)$ を $x^2+y^2+z^2$ と $xy+yz+zx$ に別々に掛けて、差をとる。

→ (2) 差の 3 つ $x-y$，$y-z$，$z-x$ を足すと 0。**和が 0 のとき (1) の右辺の因数 $x+y+z$ が消える。**

→ (3) a，b，c は連続する整数。$\dfrac{1}{2}\{\cdots\}$ の形に直すと、差が 1 や 2 で小さい数になる。

解答

(1)　$(x+y+z)$ を 2 つの式にそれぞれ掛けて展開する。

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)=x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$$

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)=x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+3xyz$$

下の式を上の式から引くと、6 つの項が打ち消し合って

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

となり、示された。

(2)　$A=x-y$，$B=y-z$，$C=z-x$ とおくと $A+B+C=0$ である。(1) の等式より

$$A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)\left(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA\right)=0$$

よって $A^3+B^3+C^3=3ABC$ であるから

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=\boldsymbol{3(x-y)(y-z)(z-x)}$$

(3)　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=\dfrac{1}{2}(1+1+4)=3$ であり、$a+b+c=6078$ であるから

$$a^3+b^3+c^3-3abc=6078\times 3=\boldsymbol{18234}$$

方針の候補

○ (2) は**和が 0 の 3 数**と見て、(1) の等式を使う。 ▶ **Point 1-1-2**

○ (3) は $\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+\cdots\}$ の形を使い、**大きな数の 3 乗を避ける**。

△ (2) を 3 項すべて展開して整理する $\cdots$ うまくいく。ただし 3 乗が 3 つ出るので書く量が多く、発想としても (1) を使う道より遠回り。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ (2) を展開して整理する道

3 つとも展開して足すと、x^3, y^3, z^3 が打ち消し合って

$$3\left\{(z-y)x^2+\left(y^2-z^2\right)x+yz(z-y)\right\}$$

が残る。$z-y$ をくくると $3(z-y)\left\{x^2-(y+z)x+yz\right\}=3(z-y)(x-y)(x-z)$ となり、これは $3(x-y)(y-z)(z-x)$ に等しい。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

- **教科書にない公式は、使う前に示す**（答案では一言添えるか、使わない道に切りかえる）。
- $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\cdot\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$ の形も合わせて覚える。
- **和が 0 の 3 数**では $A^3+B^3+C^3=3ABC$ が成り立つ。
- 連続する整数のように差が小さいときは、$\dfrac{1}{2}\{\cdots\}$ の形が**計算が短く済む**。
- どれか 1 つしか正解でない、ということはない。展開して確かめる道も使える。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 1-1-2 因数分解の公式まとめ (数 II を含む)

（本文は問 3 参照）

問 9

$x+y=4,\ xy=1$ のとき、次の値を求めよ。

(1) x^2+y^2　　(2) x^3+y^3　　(3) x^4+y^4

(4) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　　(5) $x>y$ のとき $x-y$

問題を見て思うこと

手札は対称式 → **基本対称式 $x+y$，xy で表す**。 ▶Point 1-2-1

→ (1)〜(4) はどれも x と y を入れかえても変わらない式。→ $x+y=4,\ xy=1$ に帰着できる。

→ (3) 4 乗は、x^2+y^2 を作ってから 2 乗の形にすると $\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2$。

→ (5) $x-y$ は**入れかえると符号が変わる**ので対称式ではない。→ 2 乗した $(x-y)^2$ は対称式。

解答

(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot1=\mathbf{14}$

(2)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\cdot1\cdot4=\mathbf{52}$

(3)　$x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=14^2-2\cdot1^2=\mathbf{194}$

(4)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{4}{1}=\mathbf{4}$

(5)　$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=16-4=12$。$x>y$ より $x-y>0$ であるから $x-y=\mathbf{2\sqrt{3}}$

方針の候補

○ **基本対称式 $x+y$，xy で表す**。値が与えられているので、そのまま代入できる。 ▶Point 1-2-1

△ $x,\ y$ を具体的に求めて代入する ･･･ うまくいく。ただし 4 乗の計算が重くなる。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ $x,\ y$ を具体的に求める道

$y=4-x$ を $xy=1$ に代入すると $x^2-4x+1=0$，$(x-2)^2=3$ より $x=2\pm\sqrt{3}$（$x>y$ なら $x=2+\sqrt{3},\ y=2-\sqrt{3}$）。$x^2=7+4\sqrt{3},\ y^2=7-4\sqrt{3}$ より $x^2+y^2=14$。$x^3=26+15\sqrt{3},\ y^3=26-15\sqrt{3}$ より $x^3+y^3=52$。$x^4=97+56\sqrt{3},\ y^4=97-56\sqrt{3}$ より $x^4+y^4=194$。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・対称式は**基本対称式 $x+y$，xy で表す**。

・$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy,\ x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ は**そのまま使える形**にしておく。

・分数の和 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ も、**通分すれば**対称式。

・$x-y$ のような**対称式でない式は、2 乗して対称式にする**。符号は条件（$x>y$ など）で決める。

・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。具体的に求める道も使える。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 1-2-1 対称式

x, y の式で，x と y を入れかえても同じ式になるものを**対称式**という。対称式ときたら・・・

基本対称式 $x+y, xy$ で表せ！

ex.)

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy, \quad x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2) \text{ or } =(x+y)^3-3xy(x+y)$$

※ 3 変数 x, y, z の場合は、**基本対称式 $x+y+z, xy+yz+zx, xyz$ で表す！**

問 13

$x+\dfrac{1}{x}=3$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$　　(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$

(4) $x>1$ のとき $x-\dfrac{1}{x}$

問題を見て思うこと

手札は**相反式 → カタマリ $x+\dfrac{1}{x}$ で表す**。 ▶Point 1-2-2

→ x と $\dfrac{1}{x}$ の積は 1。$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと、2 乗は t^2-2、3 乗は t^3-3t。

→ (3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ は $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2$。

→ (4) $x-\dfrac{1}{x}$ は入れかえると符号が変わる。2 乗すると t^2-4 になる。

解答

$x+\dfrac{1}{x}=3$ である。

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=\mathbf{7}$

(2)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=3^3-3\cdot 3=\mathbf{18}$

(3)　$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=\mathbf{47}$

(4)　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=9-4=5$。$x>1$ より $x>\dfrac{1}{x}$ なので $x-\dfrac{1}{x}>0$ であるから $x-\dfrac{1}{x}=\mathbf{\sqrt{5}}$

方針の候補

○ **カタマリ $x+\dfrac{1}{x}$ で表す**。値が与えられていて、そのまま代入できる。 ▶Point 1-2-2

△ x を具体的に求めて代入する ⋯ うまくいく。ただし x の値が根号を含み、3 乗・4 乗の計算が重い。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ x を具体的に求める道

$x+\dfrac{1}{x}=3$ の両辺に x を掛けると $x^2-3x+1=0$, $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$ より $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ とすると $\dfrac{1}{x}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ で、$x^2=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ より $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$。$x^3=9+4\sqrt{5}$, $\dfrac{1}{x^3}=9-4\sqrt{5}$ より $x^3+\dfrac{1}{x^3}=18$。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・相反式（x と $\dfrac{1}{x}$ が対等に入る式）は**カタマリ $x+\dfrac{1}{x}$ で表す**。
・$x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$，$x^3+\dfrac{1}{x^3}=t^3-3t$ の 2 **式を使い回す**。
・$x\cdot\dfrac{1}{x}=1$ なので、3 乗の公式の中の $3xy(x+y)$ は $3t$ **になる**。
・$x-\dfrac{1}{x}$ は 2 **乗して** t^2-4。符号は x と $\dfrac{1}{x}$ の大小で決める。
・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 1-2-2 相反式は $x+\dfrac{1}{x}$ をかたまりで扱う！

相反式ときたら・・・

カタマリ $x+\dfrac{1}{x}$ で表せ！

ex.)

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

※ $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$ や $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$ は，2 乗すると $x+\dfrac{1}{x}+2$，$x+\dfrac{1}{x}-2$ となるのもよく使う。

問 27

$x=\sqrt{3}+\sqrt{2},\ y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ とする。
(1) $x+y,\ xy,\ x^2+y^2$ の値を求めよ。
(2) x^4+y^4 の値を求めよ。
(3) x^4 の整数部分と小数部分を求めよ。

問題を見て思うこと

手札は**対称式** → **基本対称式**。 ▶Point 1-2-1
→ x と y は共役。$xy=3-2=1$ なので $y=\dfrac{1}{x}$ で、**相反式**でもある。 ▶Point 1-2-2
→ (3) x^4 を直接評価すると $\sqrt{6}$ の評価が要る。(2) で $x^4+y^4=98$ が出ているので、y^4 **が小さい正の数**と分かれば $x^4=98-y^4$ から整数部分が決まる。

解答

(1) $x+y=\mathbf{2\sqrt{3}},\ xy=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=\mathbf{1}$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=12-2=\mathbf{10}$$

(2)

$$x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2(xy)^2=100-2=\mathbf{98}$$

(3) $xy=1$ より $y=\dfrac{1}{x}$。$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}>1$ であるから $0<y<1$，したがって $0<y^4<1$ である。(2) より $x^4=98-y^4$ であるから

$$97<x^4<98$$

よって x^4 の整数部分は **97**。小数部分は $x^4-97=1-y^4$ である。$y^2=5-2\sqrt{6}$ より $y^4=49-20\sqrt{6}$ であるから

$$1-y^4=\mathbf{20\sqrt{6}-48}$$

方針の候補

○ 共役な y を組にして、x^4+y^4 **が整数になる**ことを使う。$0<y^4<1$ から整数部分が決まる。 ▶Point 1-2-1

△ $x^4=\left(5+2\sqrt{6}\right)^2=49+20\sqrt{6}$ を直接評価する ··· うまくいく。ただし $\sqrt{6}$ を小数第 3 位まで評価する必要がある。

× $x\fallingdotseq 3.146$ を 4 乗して $97.98\cdots$ とする ··· 丸めの誤差で 98 との区別があいまいになりやすく、小数部分も $20\sqrt{6}-48$ のような**正確な形では表せない**。

別の方針でも解いてみる（略解）

△ $x^4=49+20\sqrt{6}$ を評価する道

$x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ より $x^4 = 25 + 20\sqrt{6} + 24 = 49 + 20\sqrt{6}$。$2.449^2 = 5.997601 < 6 < 2.45^2 = 6.0025$ より $2.449 < \sqrt{6} < 2.45$ であるから、$48.98 < 20\sqrt{6} < 49$ となり $97.98 < x^4 < 98$。整数部分は 97 で、小数部分は $x^4 - 97 = 20\sqrt{6} - 48$。→ 同じ結論に到達する。

この問題で身につくこと

・共役な 2 数 $x,\ y$ は、**和も積も有理数**。基本対称式で $x^n + y^n$ が整数になる。
・$y = \dfrac{1}{x}$ のとき、$x^n + y^n$ **は整数**、$0 < y^n < 1$。だから x^n は**整数にごく近い数**。
・整数部分は $97 < x^4 < 98$ **とはさむ**。小数部分は $x^4 - 97$ **を正確な形で**書く。
・**共役な数を組にして考える**のは、整数部分・小数部分の定番。
・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。直接評価する道でも同じ値になる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 1-2-1 対称式
（本文は問 9 参照）
Point 1-2-2 相反式は $x + \dfrac{1}{x}$ をかたまりで扱う！
（本文は問 13 参照）