

この教材のあつかいについて

この PDF には、購入された方のお名前と注文 ID が全ページに記録されています。注文 ID はご購入の記録と結び付いているため、**お名前にどのような表示を選ばれた場合でも**、そのファイルがどの購入によるものかは分かるようになっています。

- 個人での学習・印刷は自由です。何部でも印刷してかまいません。
- **他の方への送信・共有・アップロードはご遠慮ください。**ファイルには購入者の情報が入っているため、共有された先から出どころが分かります。
- SNS・掲示板・ファイル共有サービスへの掲載、内容の転載はお断りします。
- **フリマアプリ・オークション・その他での販売や譲渡は固くお断りします。**購入されたご本人が使うためのものです。印刷したものについても同じです。
- 授業やクラスでお使いになる場合は、**クラスライセンス**をご用意しています。人数分の購入は不要です。

この教材は、出版社ではなく個人が一人で作っています。買ってくださる方がいるおかげで、次の章を作ることができます。他の方に配らず、必要な方はご自身で購入してください。上記に反する行為を確認した場合は、ファイルに記録された購入者情報をもとに事実を確認のうえ、必要な対応をとります。

※ 誤りを見つけられた場合は、サイトのお問い合わせからご連絡ください。訂正版をお送りします。

目次

第 2 節 放物線

問 1	焦点・準線・頂点・軸を読む（横向きと縦向き）	Point 5-2-1	p.7
問 2	焦点と準線から方程式を作る	Point 5-2-1	p.10
問 3	図形的な定義（ $PF = PH$ ）から軌跡を求める	Point 5-2-1	p.12
問 4	接線を 2 通りで求めて比べる	Point 5-2-1	p.14

第 3 節 楕円

問 5	焦点・長軸・短軸を読む（横長と縦長）	Point 5-3-1	p.16
問 6	距離の和が一定から軌跡を求める	Point 5-3-1	p.19
問 7	媒介変数で 1 文字にして最大最小	Point 5-3-1	p.21
問 8	平行移動した楕円（中心・焦点・長軸）	Point 5-3-1	p.24

第 4 節 双曲線

問 9	焦点・頂点・漸近線を読む（ $= 1$ と $= -1$ ）	Point 5-4-1	p.25
問 10	距離の差が一定から軌跡を求める	Point 5-4-1	p.28
問 11	直線との共有点の個数（漸近線が境目）	Point 5-4-1	p.30
問 12	2 種類の媒介変数表示を確かめ、表す範囲を見る	Point 5-4-1	p.33

第 5 節 離心率

問 13	距離の比が一定から軌跡を求める	Point 5-5-1	p.34
問 14	楕円から離心率と準線を読み戻す	Point 5-5-1	p.37

【入試対策 実戦 Point 活用演習】

問 15	楕円の接線と両軸が作る三角形の面積の最小	Point 5-3-1	p.39
問 16	双曲線の接線と漸近線（中点・面積が一定）	Point 5-4-1	p.43
問 17	放物線で $PA + PF$ の最小（準線に読みかえる）	Point 5-2-1	p.47
問 18	楕円上の点と定点の距離（2 次関数に落とす）	Point 5-3-1	p.49
問 19	離心率の定義から楕円を導き、準線 $x = \frac{a}{e}$ を示す	Point 5-5-1	p.53
問 20	焦点半径 $PF = a - ex$ と焦点を通る弦	Point 5-5-1	p.57

※ この章は Point が 4 つと少ないぶん、1 つの Point に詰まっている情報量が多い構成です。3 曲線を縦に 1 つずつ覚えるのではなく、横に見比べて違うところだけを押さえるのがこの章の使い方です。問 1・問 5・問 9 を並べて読むと、その差分がそのまま見えます。

問題編

【第2節 放物線】

問1 次の放物線について、焦点・準線・頂点・軸を求め、概形をかけ。

(1) $y^2 = 8x$ (2) $x^2 = 8y$ (Point 5-2-1)

問2 焦点が $F(0, 3)$ 、準線が直線 $y = -3$ である放物線の方程式を求めよ。 (Point 5-2-1)

問3 点 P が、定点 $F(2, 0)$ からの距離と、定直線 $x = -2$ からの距離が等しくなるように動く。図形的な定義から式を立てて、点 P の軌跡を求めよ。 (Point 5-2-1)

問4 放物線 $y^2 = 4x$ 上の点 $A(1, 2)$ における接線の方程式を、
「接線の公式を使う」「両辺を x で微分する」の2通りで求め、2つの解法を比較せよ。
(Point 5-2-1)

【第3節 楕円】

問5 次の楕円について、焦点・長軸の長さ・短軸の長さ・頂点を求め、概形をかけ。

(1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ (Point 5-3-1)

問6 2 定点 $F(4, 0)$ 、 $F'(-4, 0)$ からの距離の和が 10 である点 P の軌跡を求めよ。 (Point 5-3-1)

問7 点 P が楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上を動くとき、 P の座標を (x, y) として $x + y$ の最大値と最小値を求めよ。 (Point 5-3-1)

問8 楕円 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ の中心・焦点・長軸の長さを求めよ。 (Point 5-3-1)

【第4節 双曲線】

問9 次の双曲線について、焦点・頂点・漸近線を求め、概形をかけ。

$$(1) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (2) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1 \quad (\text{Point 5-4-1})$$

問10 2 定点 $F(5, 0)$ 、 $F'(-5, 0)$ からの距離の差の絶対値が 6 である点 P の軌跡を求めよ。

(Point 5-4-1)

問11 双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ と直線 $y = mx + 3$ の共有点の個数を、 m の値によって分類せよ。

(Point 5-4-1)

問12 $a > 0$ 、 $b > 0$ とする。次の 2 組が、いずれも双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点を表すことを示せ。

$$(1) x = \frac{a}{\cos \theta}, y = b \tan \theta \quad (2) x = \frac{a(e^t + e^{-t})}{2}, y = \frac{b(e^t - e^{-t})}{2}$$

また、(1) と (2) が曲線のどの部分を表すかをそれぞれ答えよ。

(Point 5-4-1)

【第5節 離心率】

問13 点 P から定点 $F(1, 0)$ までの距離を PF 、点 P から定直線 $x = 4$ に下ろした垂線の足を H とする。 $PF : PH = 1 : 2$ を満たしながら P が動くとき、 P の軌跡を求め、それがどの 2 次曲線かを答えよ。

(Point 5-5-1)

問14 楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ について、離心率 e を求めよ。また、この楕円が「焦点 $(3, 0)$ からの距離と、ある直線 l からの距離の比が $e : 1$ 」として得られるとき、直線 l の方程式を求めよ。

(Point 5-5-1)

【入試対策 実戦 Point 活用演習】

ここからの 6 問は、これまでの Point を組み合わせて使う入試レベルの問題です。小問の誘導が付いていますが、前の小問を使わないと後ろが解けない作りになっています。ひと目では入口が見えないものもあるので、図をかく・媒介変数で 1 文字にしてみるところから始めてください。

問15 $a > b > 0$ とし、楕円 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の第 1 象限の点を P とする。 P における C の接線が x 軸、 y 軸と交わる点をそれぞれ A 、 B とする。

(1) $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくとき、 A 、 B の座標を求めよ。

(2) $\triangle OAB$ の面積の最小値と、そのときの θ を求めよ。

(3) (2) のとき、 P は線分 AB の中点であることを示せ。

(Point 5-3-1)

問16 $a > 0$ 、 $b > 0$ とし、双曲線 $C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点を $P(x_0, y_0)$ とする。 P における C の接線が 2 本の漸近線と交わる点を Q 、 R とする。

(1) Q 、 R の座標を x_0 、 y_0 、 a 、 b を用いて表せ。

(2) P は線分 QR の中点であることを示せ。

(3) $\triangle OQR$ の面積は P の取り方によらず一定であることを示し、その値を求めよ。

(Point 5-4-1)

問 17 放物線 $C: y^2 = 4x$ の焦点を F 、準線を l とする。点 $A(4, 3)$ をとり、 P は C 上を動く。

(1) A は C の内側（焦点を含む側）にあることを確かめよ。

(2) $PA + PF$ の最小値と、そのときの P の座標を求めよ。

(3) A を C の内側の点 (p, q) に取りかえたとき、 $PA + PF$ の最小値を p を用いて表せ。

(Point 5-2-1)

問 18 点 P が楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上を動く。

(1) $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ とする。 $P(2\cos\theta, \sin\theta)$ において AP^2 を $s = \sin\theta$ の式で表せ。

(2) AP の最大値と最小値を求めよ。

(3) A を $(0, k)$ ($k > 0$) に取りかえたとき、 AP の最大値を k を用いて表せ。 (Point 5-3-1)

問 19 $c > 0$, $d > c$, $0 < e < 1$ とする。点 $P(x, y)$ から定点 $F(c, 0)$ までの距離を PF 、直線 $l: x = d$ に下ろした垂線の足を H とし、 $PF = ePH$ を満たす点 P の軌跡を C とする。

(1) C の方程式を平方完成し、 C が楕円であることを示せ。また、その中心の座標と、長半径 a (長軸の半分) を c, d, e で表せ。

(2) C の 2 つの焦点のうち一方が F と一致することを示せ。

(3) C の中心が原点となるのは d がどのような値のときか。またそのとき、 d を a と e で表せ。 (Point 5-5-1)

問 20 楕円 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ の焦点のうち $x > 0$ にあるものを F とする。

(1) C 上の点 $P(x, y)$ について、 $PF = 2 - \frac{x}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) F を通る直線が C と交わる 2 点を A, B とする。 $\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF}$ は直線の取り方によらず一定であることを示し、その値を求めよ。

(3) $AF + BF$ の最小値を求めよ。 (Point 5-5-1)

答え一覧

問 1	(1) 焦点 (2, 0), 準線 $x = -2$, 頂点 (0, 0), 軸 $y = 0$ (2) 焦点 (0, 2), 準線 $y = -2$, 頂点 (0, 0), 軸 $x = 0$	問 2	$x^2 = 12y$	問 3	放物線 $y^2 = 8x$
問 4	$y = x + 1$ (比較は解説参照)	問 5	(1) 焦点 $(\pm 4, 0)$, 長軸 10, 短軸 6, 頂点 $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 3)$ (2) 焦点 $(0, \pm 4)$, 長軸 10, 短軸 6, 頂点 $(0, \pm 5)$, $(\pm 3, 0)$	問 6	楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
問 7	最大 $\sqrt{5}$, 最小 $-\sqrt{5}$	問 8	中心 $(1, -2)$, 焦点 $(1 \pm \sqrt{5}, -2)$, 長軸 6	問 9	(1) 焦点 $(\pm 5, 0)$, 頂点 $(\pm 3, 0)$, 漸近線 $y = \pm \frac{4}{3}x$ (2) 焦点 $(0, \pm 5)$, 頂点 $(0, \pm 4)$, 漸近線 $y = \pm \frac{4}{3}x$
問 10	双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	問 11	$ m < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ かつ $m \neq \pm \frac{3}{2}$... 2 個 $m = \pm \frac{3}{2}$ または $ m = \frac{3\sqrt{2}}{2}$... 1 個 $ m > \frac{3\sqrt{2}}{2}$... 0 個	問 12	証明は解説参照 (1) 双曲線の全体 (2) $x \geq a$ の枝のみ
問 13	楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$	問 14	$e = \frac{3}{5}$, $l: x = \frac{25}{3}$		
【入試対策 実戦 Point 活用演習】					
問 15	(1) $A\left(\frac{a}{\cos \theta}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{b}{\sin \theta}\right)$ (2) 最小値 ab , $\theta = \frac{\pi}{4}$ (3) 解説参照	問 16	(1) $Q\left(\frac{a}{v}, \frac{b}{v}\right)$, $R\left(\frac{a}{u}, -\frac{b}{u}\right)$ $u = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}, v = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}$ (2) 解説参照 (3) 一定で ab	問 17	(1) 解説参照 (2) 最小値 5, $P\left(\frac{9}{4}, 3\right)$ (3) $p + 1$
問 18	(1) $-3s^2 - 3s + \frac{25}{4}$ $(-1 \leq s \leq 1)$ (2) 最大 $\sqrt{7}$, 最小 $\frac{1}{2}$ (3) $0 < k \leq 3$ のとき $\frac{2\sqrt{3(3+k^2)}}{3}$ $k > 3$ のとき $k + 1$	問 19	(1) 中心 $\left(\frac{c-e^2d}{1-e^2}, 0\right)$, $a = \frac{e(d-c)}{1-e^2}$ (2) 解説参照 (3) $d = \frac{c}{e^2}$, $d = \frac{a}{e}$	問 20	(1) 解説参照 (2) 一定で $\frac{4}{3}$ (3) 最小値 3

解説編

問 1

次の放物線について、焦点・準線・頂点・軸を求め、概形をかけ。

(1) $y^2 = 8x$ (2) $x^2 = 8y$

問題を見て思うこと

章のフロー：2次曲線は①どの曲線かを見分ける → ②標準形にそろえる → ③式のまま行くか、媒介変数で1文字にするかを決定 → ④三角関数や2次方程式の問題に落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は①と②だけ。地図の入口にあたる。

→ 2乗が片方にしか付いていない。→ ということは**放物線**。→ 楕円・双曲線は x も y も2乗されているので、ここで見分けがつく。

▶ Point 5-2-1

→ 標準形は $y^2 = 4px$ 。→ この形に合わせて p を読むだけ。

(1) $y^2 = 8x$ 。→ $4p = 8$ なので $p = 2$ 。→ 焦点 $(p, 0)$ 、準線 $x = -p$ に代入する。

→ ここで**符号の向きを取り違えないこと**。→ 焦点は**曲線が開いていく側**、準線はその**反対側**。

→ $y^2 = 8x$ は右に開くので、焦点は右、準線は左。

(2) $x^2 = 8y$ 。→ (1) の x と y が入れ替わっただけ。→ y について解くと $y = \frac{x^2}{8}$ 。→ これは数Iでおなじみの上に開く放物線。

→ だから**標準形を2つ覚える必要はない**。→ x と y の役割を入れ替えるだけ。→ $y^2 = 4px$ で得た結論の x と y を入れ替えれば、そのまま (2) の答えになる。

方針の候補

○ 標準形 $y^2 = 4px$ と見比べて p を読む。(2) は x と y を入れ替えて (1) に帰着させる。

▶ Point 5-2-1

△ 図形的な定義 (PF = PH) から毎回立て直す… 通る。F($p, 0$)、準線 $x = -p$ において計算すれば $y^2 = 4px$ が出る。ただし**読み取るだけの問題に、毎回導出を挟むのは重い**。定義に戻るのは問3のように「条件から式を作る」ときでよい。

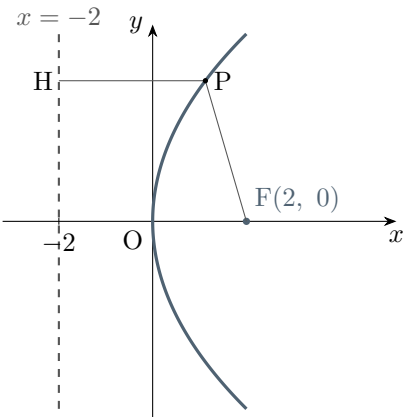
× $y^2 = 8x$ を $y^2 = 4px$ と見て $p = 8$ とする… $4p = 8$ であって $p = 8$ ではない。 p は焦点までの距離なので、ここを間違えると焦点も準線も全部ずれる。

× $x^2 = 8y$ を「横に開く放物線」と読む… 2乗されているのは x のほう。→ y が x の2次式なので**縦に開く**。2乗が付いている文字のほうが「動ける向き」ではない、と押さえる。

解答

(1) $y^2 = 8x$ を標準形 $y^2 = 4px$ と比べると $4p = 8$ 、すなわち $p = 2$ 。よって

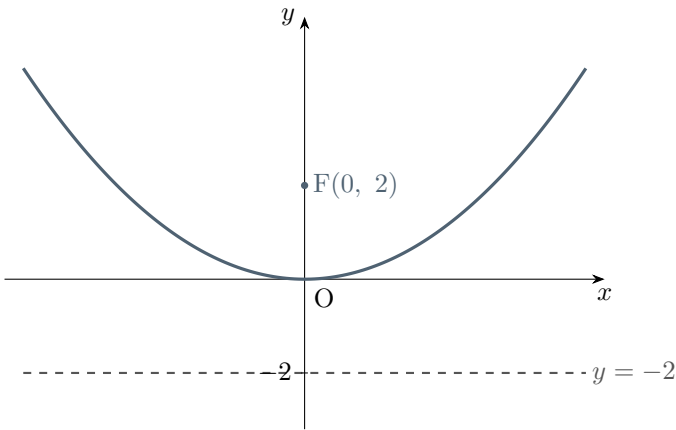
焦点 $(2, 0)$, 準線 $x = -2$, 頂点 $(0, 0)$, 軸 $y = 0$ (x 軸)



$PF = PH$ （焦点までの距離＝準線までの距離）が放物線の図形的な定義。

(2) $x^2 = 8y$ は、(1) の x と y を入れ替えたもの。標準形 $x^2 = 4py$ と比べて $4p = 8$ 、 $p = 2$ 。よって

焦点 $(0, 2)$ ， 準線 $y = -2$ ， 頂点 $(0, 0)$ ， 軸 $x = 0$ (y 軸)



(1) を $y = x$ について折り返した形。標準形は 1 つ覚えれば足りる。

この問題で身につくこと

- ・ 2 乗が片方だけなら放物線。両方なら楕円か双曲線。最初の分岐はここ。
- ・ $y^2 = 4px$ の p は焦点までの距離。 $4p = 8$ から $p = 2$ であって、 $p = 8$ ではない。
- ・ 焦点は開いていく側、準線は反対側。図をかけば符号で迷わない。
- ・ 標準形は 1 つでよい。 x と y を入れ替えれば、縦に開く形はすぐ出る。
- ・ 放物線の図形的な定義は $PF = PH$ 。この 1 本が、問 3・問 17 で効いてくる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 5-2-1 放物線の総まとめ

標準形 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$)、焦点 $(p, 0)$ 、準線 $x = -p$ 、離心率 $e = 1$ 。

図形的な定義は、定点 F と F を通らない定直線 l からの距離が等しい点の軌跡。すなわち $PF = PH$ 。

F を焦点、 l を準線、F を通り l に垂直な直線を軸、放物線と軸の交点を頂点という。

問 2

焦点が $F(0, 3)$ 、準線が直線 $y = -3$ である放物線の方程式を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままだ媒介変数か → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は②。与えられた道具から標準形を組み立てる。

→ 焦点と準線が与えられている。→ この 2 つがある時点で**放物線**だと決まっている。

▶ Point 5-2-1

→ 焦点が y 軸上、準線が x 軸に平行。→ **縦に開く形**。→ 標準形は $x^2 = 4py$ 。

→ 頂点はどこか。→ **焦点と準線のちょうど真ん中**。→ $F(0, 3)$ と $y = -3$ の中間は $y = 0$ 、つまり原点。→ 平行移動は要らない。

→ p は**頂点から焦点までの距離**。→ $p = 3$ 。→ $4p = 12$ 。

→ 検算をしておきたい。→ 準線が $y = -p = -3$ になっているか。→ なっている。よい。

→ 定義から直接立ててもよい。→ $P(x, y)$ として $PF = PH$ を書き、2 乗して整理する。→ こちらは**頂点が原点でない場合にもそのまま使える**ので、覚えておくと強い。

方針の候補

○「焦点と準線の中点が頂点」から頂点が原点だと確かめ、 $p = 3$ を標準形 $x^2 = 4py$ に入れる。

▶ Point 5-2-1

○ 図形的な定義 $PF = PH$ を $P(x, y)$ で書き、2 乗して整理する。**頂点が原点でなくても通るので**、こちらのほうが応用が利く。▶ Point 5-2-1

× $y^2 = 12x$ と答える … 開く向きが 90° ずれている。**焦点が y 軸上にあるのだから、上下に開く**。2 乗が付くのは x のほう。

× p を「焦点と準線の距離 6」ととる … p は**頂点から焦点までの距離**。焦点と準線の距離は $2p$ にあたる。

解答

方針 1 (標準形にあてはめる)

焦点 $F(0, 3)$ が y 軸上、準線 $y = -3$ が x 軸に平行であるから、この放物線は**上に開き、軸は y 軸**である。

頂点は焦点と準線の中点であり、 y 座標は $\frac{3 + (-3)}{2} = 0$ 。よって頂点は原点で、標準形は

$$x^2 = 4py$$

p は頂点から焦点までの距離であるから $p = 3$ 。したがって

$$x^2 = 12y$$

(準線が $y = -p = -3$ となり、条件に合う。)

方針 2 (定義から立てる)

$P(x, y)$ とし、 P から準線に下ろした垂線の足を H とすると $PH = |y + 3|$ 。 $PF = PH$ より

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = |y + 3|$$

両辺を 2 乗して

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9 \iff x^2 = 12y$$

(両辺とも 0 以上なので、2 乗しても同値。)

別の方針でも解いてみる (略解)

○ 平行移動で考える道

$x^2 = 12y$ の焦点は $(0, 3)$ 、準線は $y = -3$ 。もし焦点が $(0, 5)$ 、準線が $y = -1$ なら、2 つの中点 $y = 2$ が頂点なので、 $x^2 = 12y$ 全体を y 軸方向に 2 だけ動かして $x^2 = 12(y - 2)$ 。→ このように**頂点が原点でない放物線も、標準形の平行移動として書ける**。2 次曲線の入試問題は、この形で出ることが多い。

この問題で身につくこと

- ・ 焦点と準線が与えられたら**放物線**。それだけで曲線の種類が決まる。
- ・ **頂点は焦点と準線のちょうど中点**。ここを押さえれば平行移動の有無が分かる。
- ・ p は頂点から焦点までの距離。焦点と準線の距離ではない。
- ・ **開く向きは焦点の位置で決まる**。焦点が y 軸上なら $x^2 = 4py$ 。
- ・ 定義 $PF = PH$ から立てる道は、**頂点が原点でなくてもそのまま通る**。覚えておく価値がある。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-2-1 放物線の総まとめ

(本文は問 1 参照)

問 3

点 P が、定点 F(2, 0) からの距離と、定直線 $x = -2$ からの距離が等しくなるように動く。図形的な定義から式を立てて、点 P の軌跡を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままか媒介変数か → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は①から②へ渡るところ。条件そのものが図形的な定義になっている。

→ 「定点からの距離」と「定直線からの距離」が等しい。→ これは放物線の定義そのもの。

▶ Point 5-2-1

→ ただしこの問題は「答えを言い当てよ」ではなく「式を立てて求めよ」。→ 定義を式に翻訳する練習である。

→ 立て方は決まっている。→ $P(x, y)$ とおく。→ $PF = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ 。

→ 直線 $x = -2$ までの距離は？ → 垂線の足は $H(-2, y)$ 。→ $PH = |x - (-2)| = |x + 2|$ 。→

点と直線の距離の公式を持ち出す必要はない。軸に平行な直線なので、座標の差だけで出る。

→ $\sqrt{\quad}$ と絶対値が残っているので 2 乗する。→ ここで**同値性を一言**。→ 両辺とも 0 以上なので、2 乗しても同値。

→ 整理すると y^2 が残り、 x の 1 次が残る。→ 放物線の形になっているはず。→ 出た式の焦点と準線を確認めれば、もとの条件に戻れる。これが検算になる。

方針の候補

○ $P(x, y)$ とおいて $PF = PH$ を書き、両辺を 2 乗して整理する。

▶ Point 5-2-1

○ 出た式が $y^2 = 4px$ の形を確認め、**焦点と準線を読んで条件に戻す**。答えの検算になる。

△ 「定点と定直線からの距離が等しい → 放物線」と即答して、標準形にあてはめる … 通る。実際 $p = 2$ なので $y^2 = 8x$ とすぐ書ける。ただしこの問題は「式を立てて求めよ」と指定しているので、**答案としては立式を書く必要がある**。判断としては正しい。

× PH を点と直線 $x + 2 = 0$ の距離の公式で $\frac{|x+2|}{\sqrt{1^2+0^2}}$ と書いて分母を $\sqrt{2}$ にする … 分母は $\sqrt{1^2+0^2} = 1$ 。 **y の係数は 0** である。

× 2 乗するときに同値性を確かめずに進む … 今回は両辺とも 0 以上なので問題ないが、**一言添えるのが答案**。片方が負になりうる形では、2 乗は同値ではない。

解答

$P(x, y)$ とおく。P から直線 $x = -2$ に下ろした垂線の足は $H(-2, y)$ であるから

$$PF = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}, \quad PH = |x+2|$$

条件 $PF = PH$ より

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |x+2|$$

両辺はともに 0 以上であるから、2 乗しても同値である。

$$(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2 \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\therefore y^2 = 8x$$

よって求める軌跡は

$$\text{放物線 } y^2 = 8x$$

(検算: $y^2 = 8x$ は $4p = 8$ より $p = 2$ 。焦点 $(2, 0)$ 、準線 $x = -2$ となり、条件と一致する。)

この問題で身につくこと

- ・「定点と定直線からの距離が等しい」= **放物線**。3 つの定義のうち、これが放物線。
- ・**軸に平行な直線までの距離は、座標の差**。点と直線の距離の公式を出す場面ではない。
- ・2 乗するときは**両辺が 0 以上か**を一言確かめる。ここを書くのが答案の作法。
- ・出た式から**焦点と準線を読み返す**と、そのまま検算になる。
- ・条件から式を作る流れは、問 6 (和が一定)・問 10 (差が一定)・問 13 (比が一定) と全部同じ。3 **曲線は同じ手順で式になる**。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-2-1 放物線の総まとめ

(本文は問 1 参照)

問 4

放物線 $y^2 = 4x$ 上の点 $A(1, 2)$ における接線の方程式を、「接線の公式を使う」「両辺を x で微分する」の2通りで求め、2つの解法を比較せよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままか媒介変数か → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は③。同じ接線を、2つの道具で出してみる。

→ まず A が曲線上にあるかを確認する。→ $2^2 = 4 = 4 \cdot 1$ 。→ 乗っている。ここを確かめずに公式を使うと、曲線上にない点で公式を当ててしまう。

→ 道具その1：接線の公式。→ $y^2 = 4px$ 上の (x_1, y_1) での接線は $y_1y = 2p(x + x_1)$ 。

▶ Point 5-2-1 → 覚える必要はないが、知っていれば代入だけで終わる。

→ 道具その2：微分。→ $y^2 = 4x$ は y について解けば $y = \pm 2\sqrt{x}$ だが、場合分けが要って面倒。→ そのまま両辺を x で微分する（陰関数の微分）。

→ $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y \frac{dy}{dx}$ 。→ ここが要点。→ y は x の関数なので、合成関数の微分がかかる。

→ $2yy' = 4$ から $y' = \frac{2}{y}$ 。→ A では $y = 2$ なので $y' = 1$ 。→ 傾き1、点 $(1, 2)$ を通る直線。

→ どちらが良いか。→ **どちらでもよい**。→ 公式は速いが、覚えていないと出ない。微分は遅いが、**公式を忘れても必ず出せる**。→ 楕円・双曲線でも同じ関係が成り立つので、「**忘れたら微分**」を退路として持つのがよい。

→ 最後に接しているか確かめたい。→ 直線を曲線に代入して**重解になるか**を見る。

方針の候補

○ 接線の公式 $y_1y = 2p(x + x_1)$ に代入する。 $4p = 4$ より $p = 1$ 。 ▶ Point 5-2-1

○ 両辺を x で微分して $2yy' = 4$ 、 $y' = \frac{2}{y}$ から傾きを出す。**公式を覚えていなくても必ず出せる道**。

△ $y = 2\sqrt{x}$ (A は $y > 0$ 側) として微分する… 通る。 $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ で $x = 1$ のとき1。ただし**どちらの枝にいるかを毎回選ぶ**必要があり、 $y = 0$ 付近では使えない。陰関数のまま微分するほうが安全。

△ 傾き m の直線 $y = m(x - 1) + 2$ を代入し、判別式 $= 0$ とする… 通る。ただし**接点が与えられているのに未知数を増やしている**ので遠回り。この道が生きるのは、問11のように**接点が分かっているとき**である。

× $y^2 = 4x$ の両辺を微分して $2y = 4$ とする… y は x の関数なので、 $(y^2)' = 2yy'$ 。 y' を落としてはいけない。

解答

まず $A(1, 2)$ は $2^2 = 4 \cdot 1$ を満たすので、放物線上の点である。

方針1（接線の公式）

$y^2 = 4x$ は $y^2 = 4px$ で $p = 1$ の場合。点 (x_1, y_1) における接線は $y_1 y = 2p(x + x_1)$ であるから、 $(x_1, y_1) = (1, 2)$ を代入して

$$2y = 2(x + 1) \quad \therefore y = x + 1$$

方針 2 (両辺を x で微分する)

$y^2 = 4x$ の両辺を x で微分すると、 y が x の関数であることに注意して

$$2y \frac{dy}{dx} = 4 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \quad (y \neq 0)$$

A(1, 2) では $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2} = 1$ 。よって接線は

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \quad \therefore y = x + 1$$

2つの解法の比較

- **速さ**：公式のほうが速い。代入 1 回で終わる。
- **確実さ**：微分のほうが確実。公式を忘れても、その場で作り直せる。
- **通用する範囲**：どちらも楕円・双曲線に同じ形で通用する。微分の道は $y = 0$ (頂点) で使えないが、そこは接線が y 軸に平行になる場所なので、別扱いになるのはむしろ自然。

つまりどちらが正しいという話ではなく、公式を主に使い、忘れたときの退路として微分を持っておくのがよい。

(検算： $y = x + 1$ を $y^2 = 4x$ に代入すると $(x + 1)^2 = 4x$ 、すなわち $(x - 1)^2 = 0$ 。 $x = 1$ の重解となり、確かに 1 点で接している。)

別の方針でも解いてみる (略解)

△ 判別式で出す道

接点を使わずに、傾き m の直線 $y = m(x - 1) + 2$ を $y^2 = 4x$ に代入する。 $\{m(x - 1) + 2\}^2 = 4x$ を整理すると

$$m^2 x^2 + (-2m^2 + 4m - 4)x + (m^2 - 4m + 4) = 0$$

$m \neq 0$ のとき、判別式を 0 とおくと

$$(-2m^2 + 4m - 4)^2 - 4m^2(m^2 - 4m + 4) = 0$$

展開して整理すると $16(m - 1)^2 = 0$ 、すなわち $m = 1$ 。→ 同じ結論に到達する。接点分かっているのに未知数 m を置いたぶん計算が増えている。この道の出番は、接点が未知のとき (問 11 など)。

△ 媒介変数で出す道

$y^2 = 4x$ は $x = t^2$, $y = 2t$ と表せる ($4p = 4$ より $p = 1$)。A(1, 2) は $t = 1$ 。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

$t = 1$ で傾き 1。→ 同じ結論に到達する。1 文字にしてから微分する形で、楕円・双曲線でもそのまま使える。

この問題で身につくこと

- ・公式を使う前に、その点が曲線上にあるかを確認する。ここを飛ばすと意味のない式が出る。
- ・ y^2 を x で微分したら $2yy'$ 。 y' を落とさないのが陰関数の微分の要点。
- ・どちらか 1 つしか正解でない、ということはない。公式でも微分でも同じ $y = x + 1$ に着く。
- ・公式は速い、微分は忘れても出せる。主と退路の 2 本立てで持っておく。
- ・判別式の道は、接点がかかっていないときのための道具。ここでは遠回りだが、問 11 で主役になる。
- ・接線を出したら代入して重解になるかで検算できる。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-2-1 放物線の総まとめ

(本文は問 1 参照)

問 5

次の楕円について、焦点・長軸の長さ・短軸の長さ・頂点を求め、概形をかけ。

$$(1) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (2) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

問題を見て思うこと

章のフロー：2 次曲線は①どの曲線かを見分ける → ②標準形にそろえる → ③式のまま行くか、媒介変数で 1 文字にするかを定める → ④三角関数や 2 次方程式の問題に落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は①と②。楕円版の入口。

→ x^2 と y^2 が両方あり、符号が同じで和が 1。→ 楕円。 ▶ Point 5-3-1 → 差なら双曲線なので、見分けは符号だけ。

→ 焦点の位置はどちらの軸上か。→ 分母が大きいほうの軸上。→ (1) は x の下が 25 で大きいから x 軸上、(2) は y の下が 25 なので y 軸上。

→ ここが 2 次曲線で最初につまずくところ。→ 「 a が x の下」と機械的に覚えると (2) で間違える。→ a は「長いほう」と覚える。

→ 焦点までの距離 c は $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ 。→ (1) は $\sqrt{25 - 9} = 4$ 。→ (2) も中身は同じ $\sqrt{25 - 9} = 4$ で、乗る軸だけが変わる。

→ なぜ $\sqrt{a^2 - b^2}$ か。→ 短軸の端 $B(0, b)$ で考えると、 $BF = BF'$ でその和が $2a$ だから $BF = a$ 。→ 直角三角形 OBF で $b^2 + c^2 = a^2$ 。→ 図を 1 つかげば公式を覚え直せる。

→ 長軸・短軸の「長さ」を聞かれている。→ $2a, 2b$ であって a, b ではない。→ ここは読み違えやすい。

方針の候補

- 分母の大きいほうを a^2 とみて、焦点はその軸上に $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$ 。 ▶ Point 5-3-1
- $b^2 + c^2 = a^2$ の直角三角形を図にかいて確かめる。公式をうろ覚えでも図で作り直せる。

△ 図形的な定義 $PF + PF' = 2a$ から立て直す … 通るが、読み取るだけの問題には重い。定義に戻る
のは問6のように**条件から式を作る**ときでよい。

× (2) でも焦点を x 軸上とする … **分母が大きいほうの軸に焦点が乗る**。(2) は y の下が 25 なので y
軸上。「 a は x の下」と覚えていると必ずここで落とす。

× 焦点を $\sqrt{a^2 + b^2}$ とする … それは**双曲線**のほう。楕円は**引く**。→ 楕円は焦点が内側、双曲線は外
側にあると図で押さえると混ざらない。

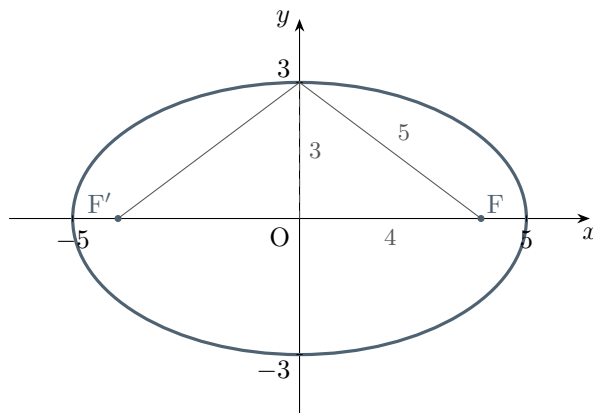
× 長軸の長さを a と答える … 長軸は AA' 全体なので $2a$ 。

■ 解答

(1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ は $a = 5$ 、 $b = 3$ ($a > b$) で、焦点は x 軸上にある。

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

焦点 $(\pm 4, 0)$ 、長軸の長さ 10、短軸の長さ 6、頂点 $(\pm 5, 0)$ 、 $(0, \pm 3)$

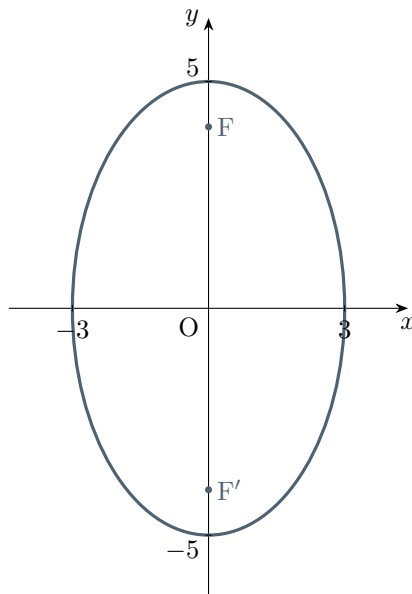


短軸の端では $BF = BF' = a = 5$ 。直角三角形 3-4-5 から $c = 4$ が読める。

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ は y の下のほうが大きいので、**縦長**の楕円。 $a = 5$ (y 方向)、 $b = 3$ (x 方向) で、
焦点は y 軸上にある。

$$c = \sqrt{25 - 9} = 4$$

焦点 $(0, \pm 4)$ 、長軸の長さ 10、短軸の長さ 6、頂点 $(0, \pm 5)$ 、 $(\pm 3, 0)$



(1) の x と y を入れ替えた形。焦点は長いほうの軸に乗る。

この問題で身につくこと

- ・ x^2 と y^2 の符号が同じで和が 1 なら楕円。差なら双曲線。
- ・ a は「長いほう」。「 x の下」と覚えると縦長で落とす。
- ・ 焦点は長軸のほうに乗る。 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ は引き算。足すのは双曲線。
- ・ 公式があいまいなら短軸の端で直角三角形をかく。 $b^2 + c^2 = a^2$ が図から出る。
- ・ 長軸・短軸の「長さ」は $2a$ 、 $2b$ 。 a 、 b ではない。
- ・ (1) と (2) は x と y を入れ替えただけ。覚える標準形は 1 つでよい。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-3-1 楕円の総まとめ

標準形 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)、焦点 $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 、離心率 $0 < e < 1$ 。

$a = b$ のときは、原点を中心とする半径 a の円になる。

(x_1, y_1) における接線は $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ 。媒介変数表示の一例は $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ 。

図形的な定義は、2 定点 F , F' からの距離の和が一定である点の軌跡。すなわち $PF + PF' = 2a$ 。

F , F' を焦点、 A , A' , B , B' を頂点、 FF' の中点を中心、 AA' を長軸、 BB' を短軸という。

問 6

2 定点 $F(4, 0)$ 、 $F'(-4, 0)$ からの距離の和が 10 である点 P の軌跡を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままか媒介変数か → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は①から②。問3の楕円版で、手順はまったく同じ。

→ 2 定点からの距離の和が一定。→ 楕円の図形的な定義そのもの。

▶ Point 5-3-1

→ ここで定義を知っていれば計算は要らない。→ 和が $2a$ なので $2a = 10$ 、 $a = 5$ 。→ 焦点が $(\pm 4, 0)$ なので $c = 4$ 。→ $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$ 。

→ 焦点が x 軸上にあるので、長軸も x 軸方向。→ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。

→ ただし「そんな点が本当にあるのか」は確かめたい。→ 三角不等式より $PF + PF' \geq FF' = 8$ 。

→ $10 > 8$ なので存在する。→ もし和が 8 なら線分、8 未満ならそんな点はない。ここは軽く触れておく価値がある。

→ 定義を使わずに、 $\sqrt{\quad}$ を 2 回はらって計算する道もある。→ 遠回りだが、なぜ標準形があの形になるのかが分かる。→ 略解に回す。

方針の候補

○ 図形的な定義から $2a = 10$ 、 $c = 4$ を読み、 $b^2 = a^2 - c^2$ で標準形を組む。▶ Point 5-3-1

○ $FF' = 8 < 10$ を確かめて、そのような点が存在することに触れる。

△ $P(x, y)$ とおいて $\sqrt{\quad}$ を 2 回はらう … 通る。標準形の導出そのものなので勉強にはなるが、2 乗を 2 回するので式が長く、同値性の断りも 2 回要る。定義を知っているなら回り道。

× $b^2 = a^2 + c^2$ とする … 双曲線の関係。楕円は引く。 $b^2 = 9$ であって 41 ではない。

× $2a = 10$ を $a = 10$ とする … 定義の右辺は長軸の長さ $2a$ 。 $a = 5$ 。

解答

$FF' = 8$ であり、 $10 > 8$ であるから、 $PF + PF' = 10$ を満たす点 P は存在し、その軌跡は F 、 F' を焦点とする楕円である。

距離の和が $2a$ に等しいから

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5$$

焦点が $(\pm 4, 0)$ であるから $c = 4$ 。楕円では $b^2 = a^2 - c^2$ であるから

$$b^2 = 25 - 16 = 9$$

焦点が x 軸上にあるので長軸は x 軸方向。よって求める軌跡は

$$\text{楕円} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(検算：点 (5, 0) で $PF + PF' = 1 + 9 = 10$ 。点 (0, 3) で $PF = PF' = \sqrt{16 + 9} = 5$ なので和は 10。ともに条件に合う。)

別の方針でも解いてみる（略解）

△ 根号を 2 回はらって導く道

$P(x, y)$ とおくと

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$$

一方を移項して 2 乗すると

$$(x-4)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + (x+4)^2 + y^2$$

整理して $20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 100 + 16x$ 、すなわち $5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 25 + 4x$ 。

右辺が 0 以上であることを確かめてもう一度 2 乗すると

$$25\{(x+4)^2 + y^2\} = (25 + 4x)^2 \iff 9x^2 + 25y^2 = 225$$

両辺を 225 で割って $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。→ 同じ結論に到達する。標準形がどこから来たのかが分かるのが利点だが、2 乗を 2 回するぶん長い。定義を覚えているなら、上の道でよい。

この問題で身につくこと

- ・ 2 定点からの距離の和が一定 = 楕円。差なら双曲線、定点と定直線が等しいなら放物線。
- ・ 定義の右辺は $2a$ 。 $2a = 10$ から $a = 5$ 。
- ・ 楕円は $b^2 = a^2 - c^2$ 。引き算。
- ・ そんな点が存在するかを確かめる。和が FF' より小さければ軌跡は空、等しければ線分。
- ・ 出た式に頂点を代入して距離の和を計算すれば、そのまま検算になる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 5-3-1 楕円の総まとめ

（本文は問 5 参照）

問 7

点 P が楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上を動くとき、P の座標を (x, y) として $x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままか媒介変数か → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は③と④。ここが2次曲線でいちばん使う流れ。

→ 楕円上を動く点について、ある式の最大最小。→ 2 文字 x, y が条件式で結ばれている形。

→ このままだと動きにくい。→ 1 文字にしたい。→ 楕円には媒介変数表示がある。

▶ Point 5-3-1

→ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ は $a = 2, b = 1$ 。→ $x = 2 \cos \theta, y = \sin \theta$ 。→ これで θ だけの式になる。

→ $x + y = 2 \cos \theta + \sin \theta$ 。→ 三角関数の合成が使える形。→ 数IIの問題に化けた。

→ これが媒介変数のうまみ。→ 2 次曲線の最大最小は、すでに得意な単元へ引きこむのが基本方針。

→ 合成すると $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ が振幅。→ θ は全実数を動けるので、 $\sin$ の中身も全実数。→ 最大 $\sqrt{5}$ 、最小 $-\sqrt{5}$ 。

→ ここで θ に制限がないことが効いている。→ もし「第1象限で」などの条件が付けば、 θ の範囲を絞る必要がある。

→ 別の道もある。→ $x + y = k$ において、直線 $y = -x + k$ が楕円と共有点をもつ k の範囲を調べる。→ 図で見えるぶん、こちらのほうが納得しやすい人もいる。

方針の候補

○ 媒介変数 $x = 2 \cos \theta, y = \sin \theta$ で 1 文字にし、三角関数の合成に持ちこむ。▶ Point 5-3-1

○ $x + y = k$ とおき、直線が楕円と共有点をもつ k の範囲を判別式で調べる。図で意味が見える。

△ $y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ と解いて 1 変数関数の最大最小にする … 通る。ただし $\pm$ の場合分けが要り、微分すると根号の入った式になる。媒介変数のほうが軽い。

× x の最大 2 と y の最大 1 を足して 3 とする … x と y は同時に最大にならない。 $x = 2$ のとき $y = 0, y = 1$ のとき $x = 0$ 。それぞれの最大を足すのは、条件式を無視している。

× 合成の振幅を $\sqrt{4+1}$ ではなく $2+1=3$ とする … $a \cos \theta + b \sin \theta$ の振幅は $\sqrt{a^2+b^2}$ 。

解答

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点は

$$x = 2 \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表せる。このとき

$$x + y = 2 \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2^2 + 1^2} \sin(\theta + \alpha) = \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha)$$

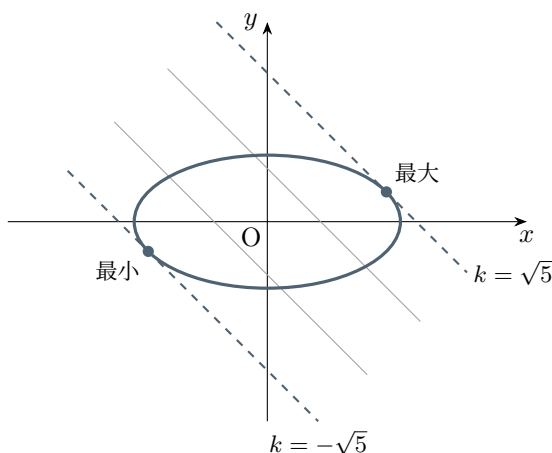
ただし α は $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす角である。

θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ を動くとき $\sin(\theta + \alpha)$ は -1 から 1 までのすべての値をとるから

$$\text{最大値 } \sqrt{5}, \quad \text{最小値 } -\sqrt{5}$$

このとき $\sin(\theta + \alpha) = 1$ 、すなわち $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta = \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 、 $\sin \theta = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ である

から、最大となるのは $P\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のとき。



直線 $x + y = k$ を平行移動し、楕円に接する瞬間が最大・最小。 $k = \pm\sqrt{5}$ 。

別の方針でも解いてみる（略解）

○ 直線を動かして考える道

$x + y = k$ とおく。直線 $y = -x + k$ が楕円と共有点をもつような k の範囲を求めればよい。代入して

$$\frac{x^2}{4} + (-x + k)^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 5x^2 - 8kx + 4k^2 - 4 = 0$$

共有点をもつ条件は（判別式） ≥ 0 であるから

$$\frac{D}{4} = 16k^2 - 5(4k^2 - 4) = -4k^2 + 20 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k^2 \leq 5$$

よって $-\sqrt{5} \leq k \leq \sqrt{5}$ 。→ 同じ結論に到達する。直線を平行移動して、楕円に接する瞬間を探しているという図が見えるのが利点。等号のとき接するので、そのまま接点も求まる。

この問題で身につくこと

- ・楕円上の点についての最大最小は、媒介変数で 1 文字にするのが第一手。
- ・ $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ 。2 次曲線の問題が三角関数の問題に化ける。

- ・得意な単元に引きこむのがこの章の狙い。合成でも、2 次関数でも同じ。
- ・ x の最大と y の最大を足してはいけない。条件式で結ばれている。
- ・ $x + y = k$ とおいて直線を動かす道も同じ答えに着く。どちらか 1 つしか正解でない、ということはない。
- ・ θ に制限が付く問題では、 $\sin(\theta + \alpha)$ の動ける範囲を先に押さえること。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-3-1 楕円の総まとめ

(本文は問 5 参照)

問 8

楕円 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ の中心・焦点・長軸の長さを求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままだ媒介変数が → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は②。標準形からずれた形を、標準形に戻す。

→ x の代わりに $x-1$ 、 y の代わりに $y+2$ が入っている。→ これは**平行移動**。→ 数 I A の 2 次関数でやったのと同じ話。

→ $x-1$ が 0 になるのは $x=1$ 、 $y+2$ が 0 になるのは $y=-2$ 。→ 中心は $(1, -2)$ 。→ **符号が逆になる**ので注意。

→ 大事なのはここ。→ **平行移動しても、形も大きさも変わらない**。→ だから a, b, c はもとの標準形と同じ。→ **焦点も同じだけ動くだけ**。

→ もとの標準形は $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$ 。→ $a=3, b=2, c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ 。→ 焦点は $(\pm\sqrt{5}, 0)$ 。

→ これを x 方向に 1、 y 方向に -2 だけ動かす。→ $(1 \pm \sqrt{5}, -2)$ 。

→ 長軸の長さは $2a=6$ 。→ 平行移動では変わらない。

→ 入試ではこの形で出ることが多い。→ 「中心をどこに置き直すか」だけが増えていて、**新しく覚えることは何もない**。

方針の候補

○ $X=x-1, Y=y+2$ において標準形に戻し、最後に (x, y) へ戻す。 ▶ Point 5-3-1

○ 「平行移動では形も大きさも変わらない」から、 a, b, c と長軸の長さはそのまま使う。

△ 展開して $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ とし、平方完成でもとに戻す… 通る。実際、**入試ではこの展開された形で与えられる**こともあるので、戻せる力は要る。ただし今回はすでに平方完成された形で与えられているので、わざわざ崩す必要はない。

× 中心を $(-1, 2)$ とする… $x-1=0$ から $x=1$ 。**符号が逆**になる。

× 焦点を $(\pm\sqrt{5}, 0)$ のままにする… 曲線を動かしたら**焦点も一緒に動く**。中心からの相対位置が $\pm\sqrt{5}$ である。

解答

$X=x-1, Y=y+2$ とおくと、与式は

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

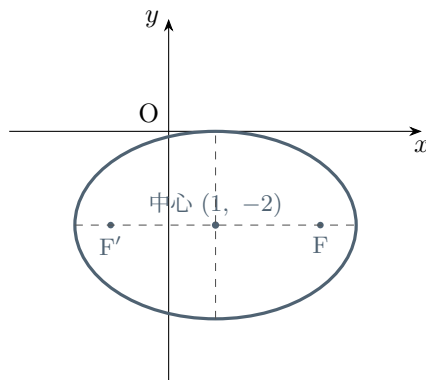
これは $a=3, b=2$ ($a>b$) の楕円で、 XY 平面では

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

より、中心 $(0, 0)$ 、焦点 $(\pm\sqrt{5}, 0)$ 、長軸の長さ $2a = 6$ である。

$X = x - 1$ 、 $Y = y + 2$ は「 x 軸方向に 1、 y 軸方向に -2 だけ平行移動した」ことを意味するから、もとの座標では

中心 $(1, -2)$ 、 焦点 $(1 \pm \sqrt{5}, -2)$ 、 長軸の長さ 6



標準形の楕円を、中心が $(1, -2)$ に来るように動かすだけ。形も大きさも変わらない。

この問題で身につくこと

- ・ $x - p$ 、 $y - q$ の形は平行移動。中心は (p, q) 。符号が逆になることに注意。
- ・ 平行移動では a 、 b 、 c も長軸の長さも変わらない。新しく覚えることはない。
- ・ 焦点も同じだけ動く。中心からの相対位置が $\pm c$ 。
- ・ 展開された形で出されたら平方完成で標準形に戻す。入試ではこちらのほうが多い。
- ・ 数 I A の 2 次関数の平行移動が、そのまま効いてくる。2 次曲線だけの新しい話ではない。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-3-1 楕円の総まとめ

(本文は問 5 参照)

問 9

次の双曲線について、焦点・頂点・漸近線を求め、概形をかけ。

$$(1) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (2) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$$

問題を見て思うこと

章のフロー：2 次曲線は①どの曲線かを見分ける → ②標準形にそろえる → ③式のまま行くか、媒介変数で 1 文字にするかを定める → ④三角関数や 2 次方程式の問題に落とす。

► Point 5-1-1

→ この問題は①と②。双曲線版の入口。

→ x^2 と y^2 の符号が違う。→ 双曲線。

► Point 5-4-1 → 楕円との見分けはここだけ。

→ 右辺が 1 か -1 か。→ これで開く向きが決まる。→ (1) は左右、(2) は上下。
 → どちらに開くかの見分け方。→ $y = 0$ において x が出るほうに頂点がある。→ (1) は $y = 0$ で $x^2 = 9$ 、 $x = \pm 3$ 。→ 頂点は x 軸上、左右に開く。
 → (2) は $y = 0$ とすると $x^2 = -9$ で解なし。→ x 軸を切らない。→ 代わりに $x = 0$ とすると $y^2 = 16$ 、 $y = \pm 4$ 。→ 上下に開く。→ この確かめ方なら符号で迷わない。
 → 焦点は $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。→ 楕円と違って足す。→ $\sqrt{9 + 16} = 5$ 。→ (1) は $(\pm 5, 0)$ 、(2) は $(0, \pm 5)$ 。
 → なぜ足すのか。→ 楕円は焦点が内側にあるので $c < a$ 、双曲線は焦点が頂点より外側なので $c > a$ 。→ 「外側だから足す」と図で押さえる。
 → 漸近線は右辺を 0 とおけば出る。→ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 0$ から $y = \pm \frac{4}{3}x$ 。→ 1 でも -1 でも漸近線は同じ。これが (1) と (2) が同じ 2 本の線に沿う理由。
 → この「右辺を 0 に」は覚えておくと速い。→ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ と因数分解できるので、0 とおけば 2 直線になる。

方針の候補

- $y = 0$ (または $x = 0$) を代入して頂点の乗る軸を決め、 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ で焦点を出す。▶ Point 5-4-1
- 漸近線は右辺を 0 において因数分解する。1 でも -1 でも同じ 2 直線になる。
- △ 図形的な定義 $|PF - PF'| = 2a$ から立て直す... 通るが、読み取るだけの問題には重い。定義に戻るのには問 10 のように条件から式を作るときでよい。
- × 焦点を $\sqrt{a^2 - b^2}$ とする... それは楕円のほう。双曲線は足す。→ 焦点が頂点の外側にあることを図で確かめれば、 $c > a$ でなければおかしいと分かる。
- × (2) の頂点を $(\pm 3, 0)$ とする... $y = 0$ とすると $x^2 = -9$ で実数解がない。(2) は x 軸と交わらない。頂点は $(0, \pm 4)$ 。
- × (2) の漸近線を $y = \pm \frac{3}{4}x$ とする... 右辺を 0 にすれば $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16}$ 、すなわち $y = \pm \frac{4}{3}x$ 。右辺の符号を変えても漸近線は変わらない。

解答

(1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ は $a = 3$ 、 $b = 4$ 。 $y = 0$ とすると $x = \pm 3$ であるから、頂点は x 軸上にあり、左右に開く。

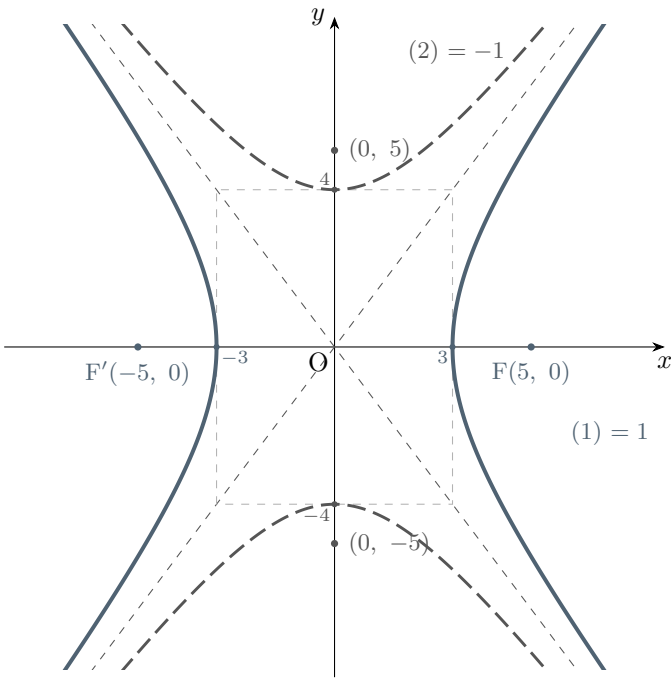
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

焦点 $(\pm 5, 0)$, 頂点 $(\pm 3, 0)$, 漸近線 $y = \pm \frac{4}{3}x$

(2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ では、 $y = 0$ とすると $x^2 = -9$ となり実数解をもたない。 $x = 0$ とすると $y = \pm 4$ であるから、頂点は y 軸上にあり、上下に開く。 $c = \sqrt{9 + 16} = 5$ より

焦点 $(0, \pm 5)$, 頂点 $(0, \pm 4)$, 漸近線 $y = \pm \frac{4}{3}x$

(漸近線は右辺を 0 とおいて得られるので、(1) と (2) で共通である。)



実線が (1)、太い破線が (2)。2 本の漸近線（細い破線）は共通で、長方形 $|x| \leq 3, |y| \leq 4$ の対角線になっている。

この問題で身につくこと

- x^2 と y^2 の符号が違えば双曲線。同じなら楕円。
- 右辺が 1 か -1 かで開く向きが決まる。 $y = 0$ において実数解が出るかで確かめる。
- 双曲線は $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。足し算。焦点が頂点の外側にあるので $c > a$ 。
- 漸近線は右辺を 0 とおく。1 でも -1 でも同じ 2 直線。
- $|x| \leq a, |y| \leq b$ の長方形の対角線が漸近線。図をかくときはこの長方形から始めるとよい。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 5-4-1 双曲線の総まとめ

標準形 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ （焦点が y 軸上のは -1 ）（ $a > 0, b > 0$ ）。

焦点 $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ （ -1 のときは $(0, \pm\sqrt{a^2 + b^2})$ ）、離心率 $e > 1$ 。

(x_1, y_1) における接線は $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ （ -1 のときは右辺 -1 ）。

漸近線は $y = \pm \frac{b}{a}x$ 。媒介変数表示の例は $x = \frac{a}{\cos \theta}, y = b \tan \theta$ 。

図形的な定義は、2 定点 F, F' からの距離の差が一定である点の軌跡。すなわち $|PF - PF'| = 2a$ 。

$a = b$ のとき、漸近線が直交する直角双曲線となる。

問 10

2 定点 $F(5, 0)$ 、 $F'(-5, 0)$ からの距離の差の絶対値が 6 である点 P の軌跡を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままか媒介変数か → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は①から②。問 3（放物線）・問 6（楕円）とまったく同じ手順の双曲線版。

→ 2 定点からの距離の差が一定。→ 双曲線の図形的な定義。

▶ Point 5-4-1

→ 差が $2a$ なので $2a = 6$ 、 $a = 3$ 。→ 焦点が $(\pm 5, 0)$ なので $c = 5$ 。→ $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$ 。

→ ここで向きに注意。→ 楕円では $b^2 = a^2 - c^2$ 、双曲線では $b^2 = c^2 - a^2$ 。→ どちらも「 $b^2 > 0$ になるほう」と覚えれば間違えない。

→ 存在の確認。→ 三角不等式より $|PF - PF'| \leq FF' = 10$ 。→ $6 < 10$ なので存在する。→ もし差が 10 なら 2 本の半直線、10 より大きければそんな点はない。

→ 楕円が「 FF' より大きい和」で存在したのに対し、双曲線は「 FF' より小さい差」で存在する。→ 向きが逆になる。ここは押さえておきたい。

→ 焦点が x 軸上なので右辺は 1。→ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 。→ 問 9(1) と同じ曲線になった。

方針の候補

○ 図形的な定義から $2a = 6$ 、 $c = 5$ を読み、 $b^2 = c^2 - a^2$ で標準形を組む。▶ Point 5-4-1

○ $FF' = 10 > 6$ を確かめて、そのような点が存在することに触れる。

△ $P(x, y)$ とおいて $\sqrt{\quad}$ を 2 回はらう … 通る。問 6 と同じ計算で、絶対値のぶんだけ場合分けが増える。定義を知っているなら回り道。

× $b^2 = a^2 - c^2$ とする … $9 - 25 = -16 < 0$ となり、 b^2 が負になっておかしい。双曲線は $b^2 = c^2 - a^2$ 。

× 絶対値を外さずに $PF - PF' = 6$ だけを扱う … それでは片方の枝しか出ない。|| が付いているので 2 本そろえる。

解答

$FF' = 10$ であり、 $6 < 10$ であるから、 $|PF - PF'| = 6$ を満たす点 P は存在し、その軌跡は F 、 F' を焦点とする双曲線である。

距離の差の絶対値が $2a$ に等しいから

$$2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

焦点が $(\pm 5, 0)$ であるから $c = 5$ 。双曲線では $b^2 = c^2 - a^2$ であるから

$$b^2 = 25 - 9 = 16$$

焦点が x 軸上にあるので右辺は 1。よって求める軌跡は

$$\text{双曲線 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

(検算：頂点 $(3, 0)$ で $PF = 2$ 、 $PF' = 8$ となり差は 6。条件に合う。)

この問題で身につくこと

- ・ 2 定点からの距離の差が一定 = 双曲線。和なら楕円。
- ・ 定義の右辺は $2a$ 。 $2a = 6$ から $a = 3$ 。
- ・ 双曲線は $b^2 = c^2 - a^2$ 。楕円と引く向きが逆。 $b^2 > 0$ になるほう、と覚える。
- ・ 楕円は「 FF' より大きい和」、双曲線は「 FF' より小さい差」で存在する。向きが逆。
- ・ 絶対値が付いているから枝が 2 本。外してしまうと片方だけになる。
- ・ 問 3・問 6・問 10 は、条件が違っただけで手順はまったく同じ。3 曲線は同じ作り方で式になる。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-4-1 双曲線の総まとめ

(本文は問 9 参照)

問 11

双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ と直線 $y = mx + 3$ の共有点の個数を、 m の値によって分類せよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままだ媒介変数が → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は④。連立して2次方程式の問題に落とす。

→ 共有点の個数。→ **連立して、実数解の個数を数えるのが基本**。→ 数II Bの「直線と円」と同じ発想。

→ 代入して整理する。→ $\frac{x^2}{4} - \frac{(mx+3)^2}{9} = 1$ 。→ 分母をはらって $9x^2 - 4(mx+3)^2 = 36$ 。

→ ここで**最大の落とし穴**。→ x^2 の係数が $9 - 4m^2$ で、0 になることがある。→ $m = \pm \frac{3}{2}$ のとき。

→ この $\pm \frac{3}{2}$ は何か。→ **漸近線の傾き $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{3}{2}$** 。

▶ Point 5-4-1 → 偶然ではない。

→ 図で考えると当たり前。→ 漸近線と平行な直線は、**片方の枝としか交わらない**。→ だから1個。→ 式のうえでは1次方程式に落ちる。

→ 「2次方程式」と決めつけて判別式に進むと、**この場合を落とす**。→ 最高次の係数が0になるかを先に確かめる、が鉄則。

→ 係数が0でないときは判別式。→ $D > 0$ なら2個、 $D = 0$ なら1個（接する）、 $D < 0$ なら0個。

→ ただし**楕円と違うところ**がある。→ 双曲線は $|x| \geq a$ の部分にしか存在しないので、**出た解が本当に曲線上にあるかが気になる**。→ ここでは代入して得た方程式なので、**解はもとの2式を同時に満たす**。心配は要らない。

→ 直線が必ず点 $(0, 3)$ を通ることにも気づきたい。→ この点は**2本の漸近線の間、双曲線の外側**にある。→ そこから傾きを振ると、交わり方が2個 → 1個 → 0個と変わっていく。図で追える。

方針の候補

○ 代入して整理し、**まず x^2 の係数が0になる m （=漸近線と平行）を分けてから**、残りを判別式で調べる。▶ Point 5-4-1

○ 直線が定点 $(0, 3)$ を通ることを見て、**図で傾きを振りながら確かめる**。答えの検算になる。

△ y を消さずに x を消す… 通る。 $x = \frac{y-3}{m}$ として代入すればよいが、 **$m = 0$ を別扱いにする必要**が出る。 y を消すほうが素直。

× いきなり判別式 ≥ 0 を計算する… $m = \pm \frac{3}{2}$ で**2次方程式ではなくなる**。この2つの値を落とすと、共有点1個の場合が2つ抜ける。

× $D = 0$ を「共有点なし」と読む… $D = 0$ は**重解**、すなわち接して1個。0個は $D < 0$ 。

× $m = \pm \frac{3}{2}$ のとき「共有点なし」とする… 1次方程式 $-24mx - 72 = 0$ になるので、解が1つあ

る。漸近線そのもの $((0, 3)$ を通らない) とは違う。

■ 解答

$y = mx + 3$ を $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ に代入し、両辺を 36 倍すると

$$9x^2 - 4(mx + 3)^2 = 36 \iff (9 - 4m^2)x^2 - 24mx - 72 = 0 \quad (*)$$

共有点の個数は、 x の方程式 $(*)$ の実数解の個数に等しい。

(i) $9 - 4m^2 = 0$ 、すなわち $m = \pm \frac{3}{2}$ のとき

$(*)$ は $-24mx - 72 = 0$ となり、 $x = -\frac{3}{m}$ のただ 1 つの解をもつ。よって共有点は 1 個。

(このとき直線は漸近線 $y = \pm \frac{3}{2}x$ と平行であり、片方の枝とだけ交わる。)

(ii) $m \neq \pm \frac{3}{2}$ のとき

$(*)$ は 2 次方程式であり、その判別式を D とすると

$$D = (-24m)^2 - 4(9 - 4m^2)(-72) = 576m^2 + 288(9 - 4m^2) = -576m^2 + 2592$$

$$\therefore D = 576 \left(\frac{9}{2} - m^2 \right)$$

よって

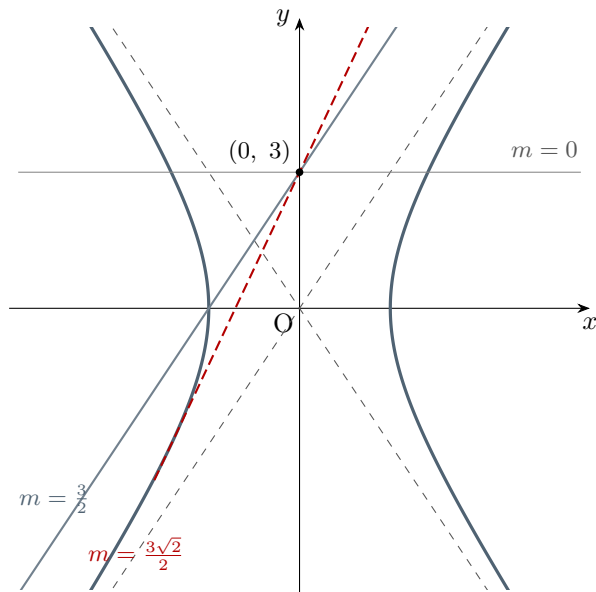
$$D > 0 \iff m^2 < \frac{9}{2} \iff -\frac{3\sqrt{2}}{2} < m < \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

以上をまとめると、 $\frac{3}{2} < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ に注意して

$$|m| < \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ かつ } m \neq \pm \frac{3}{2} \quad \dots 2 \text{ 個}$$

$$m = \pm \frac{3}{2} \text{ または } |m| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \dots 1 \text{ 個}$$

$$|m| > \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \dots 0 \text{ 個}$$



どの直線も定点 $(0, 3)$ を通る。傾きを大きくしていくと、共有点は 2 個、(漸近線と平行になって) 1 個、2 個、(接して) 1 個、0 個 と変わる。

別の方針でも解いてみる (略解)

△ 定点を通る直線束として見る道

直線 $y = mx + 3$ は、 m によらず**定点 $(0, 3)$ を通る**。この点は $\frac{0}{4} - \frac{9}{9} = -1 < 1$ なので双曲線の外側にあり、また 2 本の漸近線にはさまれた上下の領域にある。

そこから直線を回転させると、まず両方の枝を切る (2 個) → 漸近線と平行になった瞬間に片方だけ (1 個) → 同じ枝を 2 回切る (2 個) → 接する (1 個) → 離れる (0 個) と変わる。→ 同じ結論に到達する。**式を立てる前に答えの形が見えるのが利点だが、境目の値は結局計算しないと出ない。図は検算に使うのがよい。**

この問題で身につくこと

- ・ 共有点の個数は**連立して実数解を数える**。円のときと同じ。
- ・ 2 次の係数が 0 になる場合を先に分ける。これを飛ばすと 1 個の場合を落とす。
- ・ 2 次の係数が 0 になる m は**漸近線の傾き**。偶然ではなく、図で意味がある。
- ・ $D = 0$ は**接して 1 個**。0 個は $D < 0$ 。
- ・ 直線に定数項があるときは**定点を通る**。図で回転させると答えの形が見える。
- ・ 境目が 2 種類 (漸近線と平行 / 接する) 出るのが双曲線の特徴。**楕円ならこれは起きない**。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-4-1 双曲線の総まとめ

(本文は問 9 参照)

問 12

$a > 0$ 、 $b > 0$ とする。次の 2 組が、いずれも双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点を表すことを示せ。

$$(1) x = \frac{a}{\cos \theta}, y = b \tan \theta \quad (2) x = \frac{a(e^t + e^{-t})}{2}, y = \frac{b(e^t - e^{-t})}{2}$$

また、(1) と (2) が曲線のどの部分を表すかをそれぞれ答えよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままか媒介変数か → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は③。媒介変数表示という道具そのものを点検する。

→ 双曲線の媒介変数表示は 2 種類ある。▶ Point 5-4-1 → どちらも教科書で証明されずに出てくることが多い。→ 使う前に自分で確かめておきたい。

→ 「曲線上にあることを示せ」とは何をすればよいか。→ 代入して式が成り立つことを言えばよい。→ 左辺に入れて 1 になれば終わり。

→ (1) を代入すると $\frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta$ 。→ これは相互関係そのもの。→ $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ 。→ 差は 1。

→ (2) を代入すると $\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2$ 。→ 和と差の 2 乗の差なので、 $4 \cdot \frac{e^t \cdot e^{-t}}{4} = 1$ 。

→ こちらも 1。

→ ここで満足してはいけない。→ 「曲線上にある」と「曲線全体を表す」は別。→ どの部分を表すかまで見る。

→ (1) は $\cos \theta$ が正にも負にもなれる。→ $x = \frac{a}{\cos \theta}$ は $|x| \geq a$ のすべての値をとる。→ 両方の枝を表す。

→ (2) は $e^t + e^{-t} \geq 2$ (相加相乗)。→ $x \geq a$ で、右側の枝だけ。→ ここが決定的に違う。

→ この違いを知らずに (2) を使うと、左の枝の解を落とす。→ 実際の入試でよく仕込まれる罠である。

■ 方針の候補

○ 標準形の左辺に代入して 1 になることを示す。(1) は相互関係、(2) は和と差の 2 乗の差。

▶ Point 5-4-1

○ そのうえで x の動ける範囲を調べ、どの枝を表すかを言う。(2) は相加相乗で $x \geq a$ 。

△ $\cos \theta$ や e^t を消去して x, y の関係式を作る … 通る。(1) なら $\cos \theta = \frac{a}{x}$, $\tan \theta = \frac{y}{b}$ を相互関係に入れればよい。ただし代入するほうが短い。

× 代入して 1 になったところで終える … 「曲線上にある」は示せたが、どの部分を表すかは示せていない。問題文が後半でそれを聞いている。

× (2) が両方の枝を表すとする … $e^t > 0$ かつ $e^{-t} > 0$ なので、相加相乗より $e^t + e^{-t} \geq 2$ 。→ $x \geq a > 0$ で、 x は負になれない。

× (1) で $\theta = \frac{\pi}{2}$ を許す … $\cos \theta = 0$ となり x が定義できない。 $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ の断りが要る。

■ 解答

(1) $\theta \asymp \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) とする。左辺に代入すると

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{b^2} \cdot b^2 \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta$$

三角関数の相互関係 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より、これは 1 に等しい。よってこの点は双曲線上にある。

表す部分： $\cos \theta$ は $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ ($\cos \theta \asymp 0$) の範囲のすべての値をとるから、 $x = \frac{a}{\cos \theta}$ は $x \geq a$ と $x \leq -a$ のすべての値をとる。また $y = b \tan \theta$ はすべての実数値をとる。よって

(1) は双曲線の全体 (両方の枝) を表す

(2) 左辺に代入すると

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2 (e^t + e^{-t})^2}{4} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^2 (e^t - e^{-t})^2}{4} = \frac{(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2}{4}$$

和と差の 2 乗の差は 4 倍の積であるから

$$= \frac{4e^t e^{-t}}{4} = e^0 = 1$$

よってこの点も双曲線上にある。

表す部分： $e^t > 0$ 、 $e^{-t} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$e^t + e^{-t} \geq 2\sqrt{e^t \cdot e^{-t}} = 2$$

(等号は $e^t = e^{-t}$ 、すなわち $t = 0$ のとき。) したがって $x = \frac{a(e^t + e^{-t})}{2} \geq a$ であり、 y はすべての実数値をとるから

(2) は $x \geq a$ の枝 (右側の枝) だけを表す

この問題で身につくこと

- ・「曲線上にある」を示すには代入して式が成り立つことを言えばよい。
- ・(1) は相互関係 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ 、(2) は和と差の 2 乗の差が正体。
- ・「曲線上にある」と「曲線全体を表す」は別。範囲を調べるまでが仕事。
- ・(1) は両方の枝、(2) は右の枝だけ。ここを知らずに (2) を使うと左の枝の解を落とす。
- ・(2) の範囲は相加相乗で出る。 $e^t + e^{-t} \geq 2$ 。
- ・媒介変数表示は覚えるものではなく、確かめて使うもの。答案でも一言添えると安全。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-4-1 双曲線の総まとめ

(本文は問 9 参照)

問 13

点 P から定点 F(1, 0) までの距離を PF、点 P から定直線 $x = 4$ に下ろした垂線の足を H とする。PF : PH = 1 : 2 を満たしながら P が動くとき、P の軌跡を求め、それがどの 2 次曲線かを答えよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：2次曲線は①どの曲線かを見分ける → ②標準形にそろえる → ③式のまま行くか、媒介変数で1文字にするかを決定 → ④三角関数や2次方程式の問題に落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は①と②。ただし①の答えが最後まで分からないのがこれまでと違う。

→ 焦点までの距離と、準線までの距離の比が一定。→ 離心率の定義そのもの。▶ Point 5-5-1

→ $PF : PH = 1 : 2$ なので $e = \frac{PF}{PH} = \frac{1}{2}$ 。→ $0 < e < 1$ なので楕円になるはず。

→ ここが離心率の面白いところ。→ $e = 1$ なら放物線、 $0 < e < 1$ なら楕円、 $e > 1$ なら双曲線。→ 3つの曲線が1つの族の場合分けになる。

→ 問3では $e = 1$ の場合をやっていた。→ 今回はその e を $\frac{1}{2}$ にしただけ。→ 立式の手順はまったく同じ。

→ 立ててみる。→ $PF = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $PH = |x-4|$ 。→ $PF = \frac{1}{2}PH$, すなわち $2PF = PH$ 。

→ 2乗して整理。→ $4\{(x-1)^2 + y^2\} = (x-4)^2$ 。→ x^2 の係数が消えずに残り、 y^2 も残る。

→ 両方2乗の項が残るので、放物線ではない。

→ 整理すると $3x^2 + 4y^2 = 12$ 。→ 符号が同じ。→ 楕円。→ 予想と合う。

→ 最後に確かめたい。→ 出た楕円の焦点はどこか。→ $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{4-3} = 1$ 。→ 焦点 $(\pm 1, 0)$ 。→ 片方がちょうど $F(1, 0)$ 。→ 定義どおりで、気持ちがいい。

方針の候補

○ $P(x, y)$ において $2PF = PH$ を書き、2乗して整理する。▶ Point 5-5-1

○ $e = \frac{1}{2}$ で $0 < e < 1$ だから楕円になるはず、と見当を付けてから計算する。答えが予想と合うかで検算になる。

△ 楕円だと決めつけて、 a, b を未知数にして条件から求める… 通らなくはないが、中心がどこが分からないと置けない。この問題では結果的に原点だったが、それは計算して初めて分かる。素直に立式するほうが速い。

× $PF : PH = 1 : 2$ を $PF = 2PH$ とする… 比の読み違い。PFのほうが小さいので $2PF = PH$ 。→ $e = \frac{1}{2}$ であって2ではない。ここを逆にすると双曲線が出てしまう。

× PH を $|x+4|$ とする… 準線は $x=4$ なので $H(4, y)$ 、 $PH = |x-4|$ 。

解答

$P(x, y)$ とおく。Pから直線 $x=4$ に下ろした垂線の足は $H(4, y)$ であるから

$$PF = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \quad PH = |x-4|$$

$PF : PH = 1 : 2$ より $2PF = PH$ 、すなわち

$$2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x-4|$$

両辺はともに 0 以上であるから、2 乗しても同値である。

$$4\{(x-1)^2 + y^2\} = (x-4)^2$$

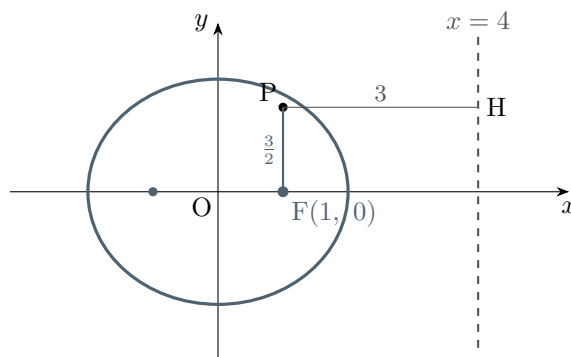
展開して

$$4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 = x^2 - 8x + 16 \iff 3x^2 + 4y^2 = 12$$

両辺を 12 で割って

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (\text{楕円})$$

(検算：この楕円は $a = 2$ 、 $b = \sqrt{3}$ で $c = \sqrt{4-3} = 1$ 。焦点は $(\pm 1, 0)$ であり、その一方が与えられた $F(1, 0)$ と一致している。また離心率は $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ で、条件の比と一致する。)



$P(1, \frac{3}{2})$ で確かめると $PF = \frac{3}{2}$ 、 $PH = 3$ で比は $1:2$ 。焦点の一方がちょうど F にある。

この問題で身につくこと

- ・焦点までの距離と準線までの距離の比が一定 = 離心率の定義。
- ・ $e = 1$ なら放物線、 $0 < e < 1$ なら楕円、 $e > 1$ なら双曲線。3 曲線は 1 つの族。
- ・比の読み違いに注意。 $PF : PH = 1 : 2$ は $e = \frac{1}{2}$ 。 PF が分子。
- ・立式の手順は問 3 とまったく同じ。比が 1 か $\frac{1}{2}$ かが違うだけ。
- ・出た楕円の焦点を計算すると与えられた F と一致する。定義から作ったのだから当然だが、検算になる。
- ・離心率が分かると答えの形を先に予想できる。予想と違ったら、どこかで間違えている。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-5-1 離心率

点 $P(x, y)$ から定直線 (準線) l までの距離を 1、点 P からある点 (焦点) F までの距離を正の定数 e としたときの点 P の軌跡が 2 次曲線である。

$e = 1$ のとき放物線、 $0 < e < 1$ のとき楕円、 $e > 1$ のとき双曲線。

問 14

楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ について、離心率 e を求めよ。また、この楕円が「焦点 (3, 0) からの距離と、ある直線 l からの距離の比が $e:1$ 」として得られるとき、直線 l の方程式を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままだ媒介変数か → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は②の逆向き。標準形から、離心率と準線を読み戻す。

→ 問 13 は「離心率と準線 → 曲線」だった。→ 今回はその逆。→ 曲線が先にあって、離心率と準線を求める。

→ まず離心率。→ 楕円の離心率は $e = \frac{c}{a}$ 。▶ Point 5-5-1 → $a = 5$ 、 $c = \sqrt{25 - 16} = 3$ 。→ $e = \frac{3}{5}$ 。

→ 焦点が (3, 0) と与えられているのも合っている。→ $c = 3$ だから。

→ 次に準線。→ 準線の位置は公式として覚えていなくてもよい。→ 定義に戻って、1 点で条件を書けば決まる。

→ どの点を使うと楽か。→ 計算しやすい点を選びたい。→ 頂点 (5, 0) か、短軸の端 (0, 4)。

→ (0, 4) で試す。→ $PF = \sqrt{9 + 16} = 5$ 。→ きれいな数。→ 準線を $x = d$ とすると $PH = |0 - d| = d$ ($d > 0$ とみて)。

→ $\frac{PF}{PH} = e$ より $\frac{5}{d} = \frac{3}{5}$ 。→ $d = \frac{25}{3}$ 。

→ もう 1 点で確かめたい。→ 頂点 (5, 0) で $PF = 2$ 、 $PH = \frac{25}{3} - 5 = \frac{10}{3}$ 。→ 比は $\frac{2}{10/3} = \frac{3}{5}$ 。→ 合う。

→ ここで規則が見える。→ $d = \frac{25}{3} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$ 。→ 準線は $x = \frac{a}{e}$ 。→ これは問 19 で一般に示す。

→ 焦点は 2 つあるので、準線も 2 本ある。→ 今回は (3, 0) に対応するほうを聞かれているので 1 本でよい。

方針の候補

○ $e = \frac{c}{a}$ で離心率を出し、楕円上の 1 点で定義の式を書いて d を決める。▶ Point 5-5-1

○ 別の点でも比が e になることを確かめる。1 点で決めた値の検算になる。

△ $P(x, y)$ を一般の点として $PF = ePH$ を立て、恒等式として d を求める … 通る。文字が残るぶん計算は重いが、「どの点でも成り立つ」ことまで示せるのは強い。問 19 でこの道を通る。

× 準線を $x = a = 5$ とする … 準線は楕円の外側にある。5 では楕円と接してしまう。 $\frac{a}{e} = \frac{25}{3} = 8.33\cdots$ で、確かに外側。

× 準線を $x = \frac{c}{e} = 5$ とする … $\frac{c}{e} = \frac{c}{c/a} = a$ なので、上と同じ誤り。 $\frac{a}{e}$ が正しい。

× 離心率を $\frac{a}{c} = \frac{5}{3}$ とする … 楕円では $0 < e < 1$ でなければならない。 $\frac{5}{3} > 1$ は明らかにおかしい。

$$e = \frac{c}{a}.$$

■ 解答

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ では $a = 5$ 、 $b = 4$ であるから

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

よって離心率は

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

(焦点が $(\pm 3, 0)$ となり、与えられた $(3, 0)$ と一致する。)

次に、求める直線を $l: x = d$ ($d > 5$) とおく。楕円上の点 $P(0, 4)$ について

$$PF = \sqrt{(0-3)^2 + 4^2} = 5, \quad PH = |0-d| = d$$

条件 $PF : PH = e : 1$ より

$$\frac{5}{d} = \frac{3}{5} \quad \therefore d = \frac{25}{3}$$

よって

$$l: x = \frac{25}{3}$$

(検算：頂点 $P(5, 0)$ では $PF = 2$ 、 $PH = \frac{25}{3} - 5 = \frac{10}{3}$ であるから $\frac{PF}{PH} = \frac{2}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{5} = e$ 。別の点でも比が e になっている。)

なお $\frac{25}{3} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$ であり、一般に**楕円の準線は** $x = \pm \frac{a}{e}$ である (問 19 で示す)。

別の方針でも解いてみる (略解)

○ 一般の点で立てて、恒等式とみる道

$P(x, y)$ を楕円上の点とし、準線を $x = d$ とする。 $PF = ePH$ の両辺を 2 乗して

$$(x-3)^2 + y^2 = \frac{9}{25}(x-d)^2$$

楕円の式から $y^2 = 16 \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) = 16 - \frac{16}{25}x^2$ を代入すると、左辺は

$$x^2 - 6x + 9 + 16 - \frac{16}{25}x^2 = \frac{9}{25}x^2 - 6x + 25$$

これが $\frac{9}{25}(x-d)^2 = \frac{9}{25}x^2 - \frac{18}{25}dx + \frac{9}{25}d^2$ と x について恒等的に等しいから、 x の係数を比べて

$$-6 = -\frac{18}{25}d \quad \therefore d = \frac{25}{3}$$

(定数項も $\frac{9}{25} \cdot \frac{625}{9} = 25$ となり一致する。) $\rightarrow$ 同じ結論に到達する。「どの点でも比が e になる」ことまで示しているのが利点。1 点で決めた道は、あとで別の点で確かめれば同じことになる。

この問題で身につくこと

- ・楕円の離心率は $e = \frac{c}{a}$ 。 $0 < e < 1$ 。 $\frac{a}{c}$ ではない。
- ・準線は $x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ 。楕円の外側にある。
- ・公式を忘れても曲線上の1点で定義の式を書けば決まる。計算しやすい点を選ぶ。
- ・決めたあと別の点で比を確かめる。これが1点で決めた値の検算になる。
- ・焦点が2つなので準線も2本。どちらの焦点に対応するかを見て答える。
- ・問13は「離心率 → 曲線」、問14はその逆向き。両方できて初めて道具になる。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-5-1 離心率

(本文は問13参照)

問15

$a > b > 0$ とし、楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の第1象限の点を P とする。 P における C の接線が x 軸、 y 軸と交わる点をそれぞれ A , B とする。

(1) $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくとき、 A , B の座標を求めよ。(2) $\triangle OAB$ の面積の最小値と、そのときの θ を求めよ。(3) (2) のとき、 P は線分 AB の中点であることを示せ。

問題を見て思うこと

章のフロー：2次曲線は①どの曲線かを見分ける → ②標準形にそろえる → ③式のまま行くか、媒介変数で1文字にするかを定める → ④三角関数や2次方程式の問題に落とす。

► Point 5-1-1

→ この問題は③と④が全部。しかも媒介変数を使うと決めるところまで問題が誘導してくれている。

→ 文字が a , b , θ と3つある。→ しかし a , b は動かない。→ 動くのは θ だけ。→ ここを最初に切り分ける。

(1) → 接線を書く。→ 公式 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ に P を入れる。

► Point 5-3-1 →

$$\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1.$$

→ この形が美しい。→ a^2 と b^2 が a , b になって、切片形に近い。→ x 切片・ y 切片がすぐ読める。

→ $y = 0$ とすると $x = \frac{a}{\cos \theta}$ 。→ $x = 0$ とすると $y = \frac{b}{\sin \theta}$ 。

(2) → 面積は $\frac{1}{2} OA \cdot OB$ 。→ 直角三角形なので底辺と高さがそのまま。→ $\frac{ab}{2 \sin \theta \cos \theta}$ 。

→ ここで2倍角が見える。→ $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ 。→ $S = \frac{ab}{\sin 2\theta}$ 。

→ 最小にするには分母を最大に。→ $\sin 2\theta$ の最大は1。→ $2\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。

→ θ の範囲を確かめる。→ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $0 < 2\theta < \pi$ 。→ $2\theta = \frac{\pi}{2}$ は範囲の中にある。→ よい。

→ 最小値は ab 。→ a, b の積という、覚えやすい答え。→ 楕円が円 $x^2 + y^2 = a^2$ のときは a^2 になる。

(3) → $\theta = \frac{\pi}{4}$ を代入するだけ。→ $A(\sqrt{2}a, 0)$ 、 $B(0, \sqrt{2}b)$ 、 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 。

→ 中点は $\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}b}{2}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 。→ 一致する。

→ なぜ中点になるのか。→ 面積が最小のとき、接点が切片の真ん中に来る。→ これは楕円に限らない性質で、双曲線でも似た話が出る (問 16)。

方針の候補

○ 媒介変数で P を表し、接線の公式から切片を読む。面積を θ の式にして 2 倍角で 1 つの $\sin$ にまとめる。▶ Point 5-3-1

○ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から $0 < 2\theta < \pi$ を確かめ、 $\sin 2\theta = 1$ が範囲内で起きることを言う。

△ $P(x_0, y_0)$ のまま進める … 通る。接線は $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ 、切片は $\frac{a^2}{x_0}$ 、 $\frac{b^2}{y_0}$ で、面積は $\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}$ 。
 x_0y_0 の最大を求めることになり、条件 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ のもとで相加相乗に持ちこめば同じ答えに着く。1 文字にする手間はないが、条件付き最大最小の処理が必要。

△ 微分して最小を求める … 通る。 $S(\theta) = \frac{ab}{\sin 2\theta}$ を微分すれば $\cos 2\theta = 0$ が出る。ただし $\sin$ の最大が 1 だと知っていれば微分は要らない。

× 面積を $\frac{1}{2}OA \cdot OB \sin \angle AOB$ として $\sin \angle AOB$ を残す … $\angle AOB$ は直角なので $\sin = 1$ 。残すと式が重くなるだけ。

× $\sin 2\theta$ の最大を、 θ の範囲を見ずに 1 と決める … 今回は範囲内だが、範囲が狭いと端点が最大になることがある。確認は必ずする。

解答

(1) 点 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ における C の接線は

$$\frac{(a \cos \theta)x}{a^2} + \frac{(b \sin \theta)y}{b^2} = 1 \quad \therefore \frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta \neq 0$ 、 $\sin \theta \neq 0$ であるから、 $y = 0$ において $x = \frac{a}{\cos \theta}$ 、 $x = 0$ において $y = \frac{b}{\sin \theta}$ 。よって

$$A\left(\frac{a}{\cos \theta}, 0\right), \quad B\left(0, \frac{b}{\sin \theta}\right)$$

(2) $\angle AOB = 90^\circ$ であり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ では OA, OB はともに正であるから

$$S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cos \theta} \cdot \frac{b}{\sin \theta} = \frac{ab}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{ab}{\sin 2\theta}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < 2\theta < \pi$ であるから、 $0 < \sin 2\theta \leq 1$ であり、 $\sin 2\theta = 1$ すなわち $2\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき

S は最小になる。

$$\text{最小値 } ab \quad \left(\theta = \frac{\pi}{4} \right)$$

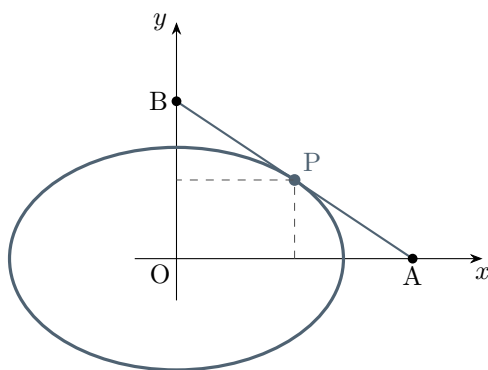
(3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $\cos \theta = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$A(\sqrt{2}a, 0), \quad B(0, \sqrt{2}b), \quad P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

線分 AB の中点は

$$\left(\frac{\sqrt{2}a + 0}{2}, \frac{0 + \sqrt{2}b}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b \right) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$$

これは P の座標と一致する。よって P は線分 AB の中点である。 ■



面積が最小のとき、接点 P がちょうど AB の中点に来る。 $OA = \sqrt{2}a$ 、 $OB = \sqrt{2}b$ 。

別の方針でも解いてみる（略解）

○ 接点を (x_0, y_0) のまま進める道

接線は $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ なので、 $A\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$ 、 $B\left(0, \frac{b^2}{y_0}\right)$ 。面積は

$$S = \frac{a^2b^2}{2x_0y_0}$$

S を最小にするには x_0y_0 を最大にすればよい。条件 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ と相加平均・相乗平均の関係から

$$1 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{x_0^2y_0^2}{a^2b^2}} = \frac{2x_0y_0}{ab} \quad \therefore x_0y_0 \leq \frac{ab}{2}$$

等号は $\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ 、すなわち $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 、 $y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$ のとき。よって $S \geq \frac{a^2b^2}{2 \cdot \frac{ab}{2}} = ab$ 。→ 同じ結論に到達する。媒介変数を使わずに済むが、条件付き最大最小の処理が要る。どちらでもよい。

△ 円に戻して考える道

$x = aX$ 、 $y = bY$ と置きかえると、楕円は単位円 $X^2 + Y^2 = 1$ になる。この置きかえで面積は ab 倍される。単位円の接線が作る直角三角形の面積の最小値は、対称性から接点が $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のときで 1。よって

求める最小値は $ab \cdot 1 = ab$ 。→ 同じ結論に到達する。「楕円は円を縦横に伸ばしたもの」という見方が使えると速いが、面積が ab 倍になることを断る必要がある。

この問題で身につくこと

- ・楕円上の点は媒介変数で 1 文字に。3 つの文字のうち動くのはどれかを最初に切り分ける。
- ・接線の公式に媒介変数を入れると $\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1$ 。切片がそのまま読める形になる。
- ・ $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$ を見たら 2 倍角。1 つの $\sin$ にまとまる。
- ・最小にするには分母を最大に。 $\sin$ の最大は 1 だが、 θ の範囲の中で起きるかを必ず確かめる。
- ・答え ab は覚えやすい形。円 ($a = b$) なら a^2 になる、と検算できる。
- ・面積最小のとき接点が切片の midpoint。この「中点になる」構図は問 16 の双曲線でも出てくる。
- ・どれか 1 つしか正解でない、ということはない。媒介変数でも、相加相乗でも、円に戻しても ab に着く。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-3-1 楕円の総まとめ

(本文は問 5 参照)

問 16

$a > 0, b > 0$ とし、双曲線 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点を $P(x_0, y_0)$ とする。P における C の接線が 2 本の漸近線と交わる点を Q, R とする。

- (1) Q, R の座標を x_0, y_0, a, b を用いて表せ。 (2) P は線分 QR の中点であることを示せ。
(3) $\triangle OQR$ の面積は P の取り方によらず一定であることを示し、その値を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままか媒介変数か → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は③。ここでは媒介変数を使わず、 (x_0, y_0) のまま行くほうが見通しがよい。

→ なぜか。→ 「P の取り方によらず一定」を示すのが目的。→ x_0, y_0 が最後に消えることを見せたい。→ 媒介変数にすると、消える様子がかえって見えにくい。

→ ただし条件 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ は最後まで取っておく。→ これが「一定」を生む種。

(1) → 接線は $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ 。▶ Point 5-4-1 → 漸近線 $y = \pm \frac{b}{a}x$ を代入して交点を出す。

→ $y = \frac{b}{a}x$ を代入。→ $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0}{b^2} \cdot \frac{b}{a}x = 1$ 。→ x でくくると $x \left(\frac{x_0}{a^2} - \frac{y_0}{ab} \right) = 1$ 。

→ $\frac{1}{a}$ でくくると $\frac{x}{a} \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) = 1$ 。→ $\frac{x_0}{a} \pm \frac{y_0}{b}$ という組み合わせが出てきた。→ これは重要な合図。

→ なぜ重要か。→ 条件式が $\left(\frac{x_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{y_0}{b} \right)^2 = 1$ 、すなわち $\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) = 1$ 。→ 2 つの因数の積が 1。

→ ここが問題の急所。→ 記号を $u = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}, v = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}$ と置くと $uv = 1$ 。→ 式がすっきりする。

(2) → Q, R の x 座標は $\frac{a}{v}, \frac{a}{u}$ 。→ 和は $a \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) = a \cdot \frac{u+v}{uv} = a(u+v)$ 。→ $uv = 1$ が効いた。

→ $u+v = \frac{2x_0}{a}$ なので、和は $2x_0$ 。→ 中点の x 座標は x_0 。→ 一致した。

(3) → 面積は $\frac{1}{2} |x_Q y_R - x_R y_Q|$ 。→ 原点を含む三角形なので、この形が速い。

→ 代入すると u, v が全部 uv の形で現れて、1 になって消える。→ ab が残る。

→ 答えが問 15 と同じ ab 。→ 偶然ではなく、どちらも「2 本の直線と接線が作る三角形」という同じ構図。

■ 方針の候補

○ 接点を (x_0, y_0) のままにし、 $u = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}, v = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}$ と置く。条件式が $uv = 1$ になり、以後すべてこれで消える。▶ Point 5-4-1

○ 面積は $\frac{1}{2} |x_Q y_R - x_R y_Q|$ を使う。原点が頂点の三角形なのでこれが速い。

△ 媒介変数 $x_0 = \frac{a}{\cos \theta}, y_0 = b \tan \theta$ を使う … 通る。 $u = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}, v = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ となり、

$uv = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1$ 。同じ構図に着く。ただし右の枝しか表さない表示もある（問12）ので、一般性の断りが要る。 (x_0, y_0) のままのほうが安全。

△ QR の長さ、原点から接線までの距離を掛ける … 通る。ただし点と直線の距離が根号を含むので、約分が見えにくい。上の2通りのほうが軽い。

× P を具体的な点にして計算し、「一定」と結論する … 1 点で確かめても「よらない」ことは示せない。文字のまま進めて x_0, y_0 が消えるのを見せる必要がある。

× 条件式 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ を使わずに進める … この式が「一定」の源。使わないと x_0, y_0 は消えない。

■ 解答

$u = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}$ 、 $v = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}$ とおく。P が C 上にあることから

$$uv = \left(\frac{x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad (*)$$

特に $u \neq 0$ 、 $v \neq 0$ である。

(1) P における C の接線は

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

漸近線 $y = \frac{b}{a}x$ を代入すると

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0}{b^2} \cdot \frac{b}{a}x = 1 \iff \frac{x}{a} \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) = 1 \iff \frac{x}{a} v = 1$$

よって $x = \frac{a}{v}$ 、 $y = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{v} = \frac{b}{v}$ 。同様に $y = -\frac{b}{a}x$ を代入すると $\frac{x}{a}u = 1$ より $x = \frac{a}{u}$ 、 $y = -\frac{b}{u}$ 。したがって

$$Q\left(\frac{a}{v}, \frac{b}{v}\right), \quad R\left(\frac{a}{u}, -\frac{b}{u}\right)$$

ただし $u = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}$ 、 $v = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}$ である。

(2) (*) より $\frac{1}{u} = v$ 、 $\frac{1}{v} = u$ であるから

$$Q(au, bu), \quad R(av, -bv)$$

と書き直せる。線分 QR の中点は

$$\left(\frac{au + av}{2}, \frac{bu - bv}{2}\right) = \left(\frac{a(u+v)}{2}, \frac{b(u-v)}{2}\right)$$

ここで

$$u + v = \frac{2x_0}{a}, \quad u - v = \frac{2y_0}{b}$$

であるから、中点は

$$\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{2x_0}{a}, \frac{b}{2} \cdot \frac{2y_0}{b}\right) = (x_0, y_0)$$

これは P に一致する。よって P は線分 QR の中点である。 ■

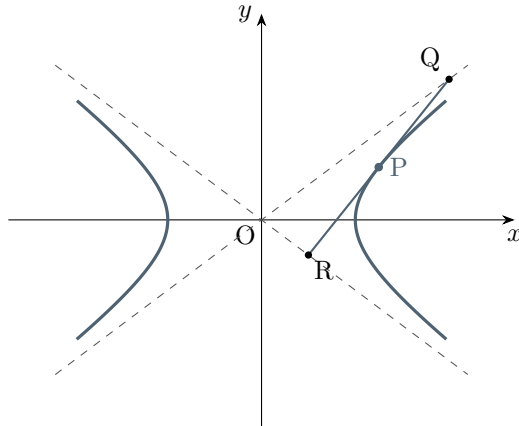
(3) O, Q(au, bu), R(av, -bv) が作る三角形の面積は

$$\triangle OQR = \frac{1}{2} |au \cdot (-bv) - av \cdot bu| = \frac{1}{2} |-2ab uv| = ab |uv|$$

(*) より $uv = 1$ であるから

$$\triangle OQR = ab$$

これは x_0, y_0 を含まないから、P の取り方によらず一定である。 ■



接点 P がどこにあっても、P は QR の中点で、 $\triangle OQR$ の面積は ab のまま変わらない。

別の方針でも解いてみる (略解)

△ 媒介変数で進める道

$x_0 = \frac{a}{\cos \theta}$ 、 $y_0 = b \tan \theta$ (右の枝) とすると

$$u = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}, \quad v = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

であり

$$uv = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1$$

以下は本解と同じで、面積は ab 。→ 同じ結論に到達する。ただしこの表示は右の枝しか表さないの、左の枝についても同じであることを別に断る必要がある (問 12)。(x₀, y₀) のまま進めるほうが安全。

△ 直線の長さ × 高さで出す道

QR の長さは、Q(au, bu)、R(av, -bv) より

$$QR = \sqrt{a^2(u - v)^2 + b^2(u + v)^2}$$

原点と接線 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ の距離は $\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$ 。 $u + v = \frac{2x_0}{a}$ 、 $u - v = \frac{2y_0}{b}$ を使って掛け合わせると、

根号が約分されて $2ab$ となり、面積は ab 。→ 同じ結論に到達する。根号どうしが消えるのが気持ちよいが、途中式は長い。

この問題で身につくこと

- ・「P の取り方によらず一定」は、**文字のまま進めて消えるのを見せる**。1 点で確かめても示したことにならない。
- ・ $\frac{x_0}{a} \pm \frac{y_0}{b}$ の組が出たら、**条件式が「積が 1」になっている合図**。まとめて u, v と置く。
- ・ 原点が頂点の三角形の面積は $\frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ 。**座標が出ていればこれが最速**。
- ・ 答え ab は問 15 と同じ。「2 本の直線と接線が作る三角形」という構図が共通しているから。
- ・ 媒介変数 $x = \frac{a}{\cos \theta}$, $y = b \tan \theta$ は**枝の範囲に注意**。 (x_0, y_0) のまま行くほうが安全なことがある。
- ・ **条件式は最後まで取っておく道具**。早く代入して消してしまうと、きれいにまとまらない。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-4-1 双曲線の総まとめ

(本文は問 9 参照)

問 17

放物線 $C: y^2 = 4x$ の焦点を F 、準線を l とする。点 $A(4, 3)$ をとり、 P は C 上を動く。
 (1) A は C の内側（焦点を含む側）にあることを確かめよ。(2) $PA + PF$ の最小値と、そのときの P の座標を求めよ。(3) A を C の内側の点 (p, q) に取りかえたとき、 $PA + PF$ の最小値を p を用いて表せ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままだ媒介変数か → ④落とす。

► Point 5-1-1

→ この問題は①に戻る。→ 「放物線とは何だったか」を思い出せるかで勝負が決まる。
 → $PA + PF$ の最小。→ まともに座標で書くと $\sqrt{\quad}$ が2つ。→ 微分しても地獄。
 → ここで手が止まる。→ 止まったら曲線の定義に戻る。→ 放物線の定義は $PF = PH$ 。

► Point 5-2-1

→ PF を PH に取りかえられる。→ $PA + PF = PA + PH$ 。
 → これで景色が変わる。→ 「点 A から P を経由して準線に降りる折れ線」の長さ。→ **最短は、まっすぐ降りるとき。**
 → まっすぐ降りるとは。→ A から準線 $x = -1$ に垂線を下ろす。→ その垂線が放物線と交わる点が P 。→ 長さは A から準線までの距離。
 → ただしその垂線が本当に放物線と交わるかを確かめないといけない。→ ここで (1) が効く。
 → A が内側にあれば、 A から左に伸ばした半直線は必ず放物線を1回横切る。
 → (1) の確かめ方。→ $A(4, 3)$ で $q^2 = 9$ 、 $4p = 16$ 。→ $9 < 16$ なので内側。→ $y^2 < 4x$ が内側。
 → (2) 最小値は A から準線 $x = -1$ までの距離。→ $4 - (-1) = 5$ 。→ そのときの P は $y = 3$ の高さ。→ $9 = 4x$ から $x = \frac{9}{4}$ 。
 → (3) 一般化。→ 計算をやり直す必要はない。→ 同じ議論で、 $A(p, q)$ から準線までの距離。
 → $p - (-1) = p + 1$ 。
 → q が答えに出てこないのが面白い。→ 高さは関係なく、準線からの水平距離だけで決まる。

方針の候補

- 定義 $PF = PH$ で PF を準線までの距離に取りかえ、折れ線の最短に読みかえる。 ► Point 5-2-1
- A が内側にあることを $q^2 < 4p$ で確かめ、垂線が放物線と交わることを保証する。
- △ $P\left(\frac{t^2}{4}, t\right)$ において $f(t) = PA + PF$ を微分する … 通らなくはないが、 $\sqrt{\quad}$ が2つ入った式の微分になり、手計算では現実的でない。方針としては正しいので △。
- × PA の最小と PF の最小を別々に求めて足す … 最小になる P が別々なので、和の最小にはならない。 PF の最小は頂点、 PA の最小は別の点。
- × A が外側でも同じ答えとする … 外側 ($q^2 > 4p$) だと、 A から準線への垂線が放物線と交わらない。等号が成立せず、最小値は別の値になる。(1) はそのための確認である。

■ 解答

$y^2 = 4x$ は $4p = 4$ より $p = 1$ であるから、焦点は $F(1, 0)$ 、準線は $l: x = -1$ である。

(1) $A(4, 3)$ について $3^2 = 9$ 、 $4 \cdot 4 = 16$ であり

$$3^2 < 4 \cdot 4$$

が成り立つ。 $y^2 < 4x$ は放物線の内側（焦点を含む側）を表すから、 A は C の内側にある。 ■

(2) P から準線 l に下ろした垂線の足を H とすると、放物線の定義より $PF = PH$ 。よって

$$PA + PF = PA + PH$$

右辺は、点 A から P を経由して準線 l に至る折れ線の長さである。これは A から l までの距離以上であり、

$$PA + PH \geq (A \text{ から } l \text{ までの距離}) = 4 - (-1) = 5$$

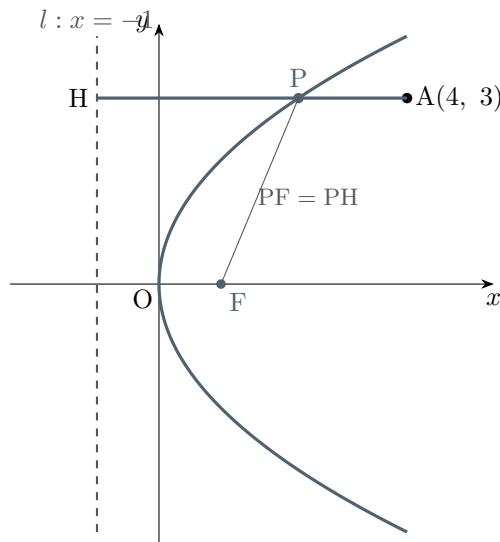
等号は A, P, H がこの順に l に垂直な直線上に並ぶとき、すなわち P の y 座標が 3 のときである。

(1) より A は内側にあるので、このような P は C 上に存在する。

$y = 3$ を $y^2 = 4x$ に代入して $x = \frac{9}{4}$ 。よって

$$\text{最小値 } 5 \quad \left(P \left(\frac{9}{4}, 3 \right) \right)$$

(検算： $PA = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$ 、 $PF = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 1\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + 9} = \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{13}{4}$ 。和は $\frac{7}{4} + \frac{13}{4} = 5$ 。)



PF を PH に取りかえると、折れ線 $A \rightarrow P \rightarrow H$ の最短、すなわち水平な線分になる。

(3) $A(p, q)$ が C の内側にあるとき、(2) と同じ議論により

$$PA + PF = PA + PH \geq (A \text{ から } l \text{ までの距離}) = p - (-1) = p + 1$$

等号は P の y 座標が q のときに成り立ち、 A が内側にあるからこのような P は存在する。よって

最小値 $p + 1$

(q には依存しない。最小値は準線からの水平距離だけで決まる。)

この問題で身につくこと

- ・手が止まったら曲線の定義に戻る。放物線は $PF = PH$ 。
- ・ PF を PH に取りかえると、 $\sqrt{\quad}$ の和が折れ線の長さに化ける。
- ・折れ線の最短はまっすぐ。ただし等号が成立する点が曲線上にあるかを必ず確かめる。
- ・ PA の最小と PF の最小を別々に足してはいけない。最小になる点が違う。
- ・(1) は飾りではない。等号成立を保証するための下ごしらえ。
- ・答えに q が出てこない。一般化すると、何が本質だったかが見える。ここでは水平距離だけ。
- ・微分で押す道も方針としては正しい。ただし $\sqrt{\quad}$ が 2 つの式は手計算に向かない。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-2-1 放物線の総まとめ

(本文は問 1 参照)

問 18

点 P が楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上を動く。

- (1) $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ とする。 $P(2\cos\theta, \sin\theta)$ とおいて AP^2 を $s = \sin\theta$ の式で表せ。 (2) AP の最大値と最小値を求めよ。 (3) A を $(0, k)$ ($k > 0$) に取りかえたとき、 AP の最大値を k を用いて表せ。

問題を見て思うこと

章のフロー：2次曲線は①どの曲線かを見分ける → ②標準形にそろえる → ③式のまま行くか、媒介変数で1文字にするかを定める → ④三角関数や2次方程式の問題に落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は③と④。ただし落ちる先が三角関数ではなく2次関数なのがポイント。

(1) → 距離の最大最小。→ 根号が付くので、まず2乗して考える。→ AP が最大 $\iff AP^2$ が最大 ($AP \geq 0$ だから)。

→ 媒介変数を入れる。→ $AP^2 = 4\cos^2\theta + \left(\sin\theta - \frac{3}{2}\right)^2$ 。

→ このままだと $\cos$ と $\sin$ が混ざっている。→ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ で $\sin$ にそろえる。→ $s = \sin\theta$ の2次式になる。

→ 三角関数の合成ではなく2次関数に落ちた。→ これは $\cos^2$ と $\sin$ の1次が混ざっているから。→ よくある形。

(2) → 2次関数の最大最小。→ ただし s の範囲は $-1 \leq s \leq 1$ 。→ ここを忘れると事故る。

$\rightarrow AP^2 = -3s^2 - 3s + \frac{25}{4}$ 。 $\rightarrow$ 上に凸。 $\rightarrow$ 軸は $s = -\frac{1}{2}$ 。
 $\rightarrow$ 軸が範囲の中にある。 $\rightarrow$ 最大は軸のところ。 $\rightarrow s = -\frac{1}{2}$ で 7。
 $\rightarrow$ 最小は軸から遠いほうの端。 $\rightarrow s = -1$ と $s = 1$ のうち、軸 $-\frac{1}{2}$ から遠いのは $s = 1$ 。 $\rightarrow \frac{1}{4}$ 。
 $\rightarrow$ 最小が $\frac{1}{4}$ ということは $AP = \frac{1}{2}$ 。 $\rightarrow A$ は y 軸上の $\frac{3}{2}$ 、楕円の上端は $(0, 1)$ 。 $\rightarrow$ 距離 $\frac{1}{2}$ 。
 $\rightarrow$ 上端がいちばん近い、と図でも合う。
(3) $\rightarrow \frac{3}{2}$ を k に変えるだけ。 $\rightarrow$ ただし軸の位置が k で動く。 $\rightarrow$ 軸は $s = -\frac{k}{3}$ 。
 $\rightarrow$ 軸が範囲に入るかで場合分け。 $\rightarrow -\frac{k}{3} \geq -1$ 、すなわち $k \leq 3$ なら軸が範囲内。 $\rightarrow k > 3$ なら軸が左に外れる。
 $\rightarrow$ 軸が左に外れると、区間 $[-1, 1]$ では単調減少。 $\rightarrow$ 最大は左端 $s = -1$ 。
 $\rightarrow k > 3$ で最大が $s = -1$ になるのは、図でも納得できる。 $\rightarrow A$ が高いところにあると、いちばん遠いのは楕円の下端になる。
 $\rightarrow k = 3$ が境目。 $\rightarrow$ 両方の式に $k = 3$ を入れて同じ値になるかを確かめれば検算になる。

方針の候補

- AP^2 で考え、媒介変数を入れて $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ で $s = \sin \theta$ の 2 次式にする。 ▶ Point 5-3-1
- $-1 \leq s \leq 1$ のもとで、軸の位置と区間の関係で場合分けする。
- △ $P(x, y)$ のまま $y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$ を代入して x の 2 次関数にする … 通らない。 $AP^2 = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$ には y の 1 次が残るので、 x だけの式にはならない。 y にそろえる ($x^2 = 4 - 4y^2$ を代入する) なら通り、 s の道と実質同じ。
- △ $AP = k$ において円 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = k^2$ が楕円と共有点をもつ条件を調べる … 通る。2 つの 2 次曲線の共有点なので計算は重いが、図で見えるのは利点。
- × s の範囲を忘れて、軸での値をそのまま最大最小とする … (3) で $k > 3$ のとき軸は $s = -\frac{k}{3} < -1$ となり範囲の外。区間の端で考えなければならない。
- × 最小を「軸に近いほうの端」とする … 上に凸なので、最小は軸から遠いほうの端。 $s = -\frac{1}{2}$ から遠いのは $s = 1$ 。
- × AP^2 の最大を求めて、 AP に直し忘れる … 聞かれているのは AP 。 $\sqrt{\quad}$ を取る。

解答

(1) $P(2 \cos \theta, \sin \theta)$ 、 $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ より

$$AP^2 = (2 \cos \theta)^2 + \left(\sin \theta - \frac{3}{2}\right)^2 = 4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + \frac{9}{4}$$

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ を代入して、 $s = \sin \theta$ とおくと

$$AP^2 = 4(1 - s^2) + s^2 - 3s + \frac{9}{4} = -3s^2 - 3s + \frac{25}{4} \quad (-1 \leq s \leq 1)$$

(2) $f(s) = -3s^2 - 3s + \frac{25}{4}$ とおくと

$$f(s) = -3\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + \frac{25}{4} = -3\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 7$$

上に凸で軸は $s = -\frac{1}{2}$ 。これは $-1 \leq s \leq 1$ の内部にあるから、 $s = -\frac{1}{2}$ で最大値 7。

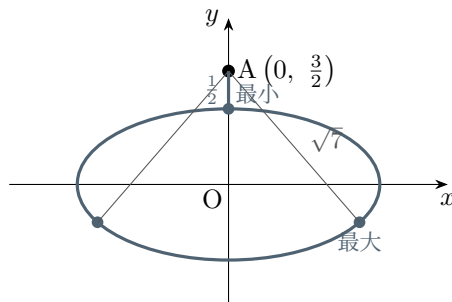
最小は軸から遠いほうの端でとる。 $|-1 - (-\frac{1}{2})| = \frac{1}{2}$ 、 $|1 - (-\frac{1}{2})| = \frac{3}{2}$ より $s = 1$ のときで

$$f(1) = -3 - 3 + \frac{25}{4} = \frac{1}{4}$$

$AP \geq 0$ であるから

$$\text{最大値 } \sqrt{7}, \quad \text{最小値 } \frac{1}{2}$$

(最小は $s = \sin \theta = 1$ 、すなわち $P(0, 1)$ のとき。A の真下の、楕円の上端である。)



最小は真下の上端。最大は $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ の 2 点で、下端 $(0, -1)$ ではない。

(3) $A(0, k)$ のとき、同様に

$$AP^2 = 4(1 - s^2) + (s - k)^2 = -3s^2 - 2ks + 4 + k^2 = -3\left(s + \frac{k}{3}\right)^2 + 4 + \frac{4}{3}k^2$$

軸は $s = -\frac{k}{3}$ ($k > 0$ より負)。

(i) $0 < k \leq 3$ のとき $-1 \leq -\frac{k}{3} < 0$ より軸は区間内にあるから、最大値は

$$AP^2 = 4 + \frac{4}{3}k^2 \quad \therefore AP = \sqrt{4 + \frac{4}{3}k^2} = \frac{2\sqrt{3(3+k^2)}}{3}$$

(ii) $k > 3$ のとき $-\frac{k}{3} < -1$ より軸は区間の左外にあり、区間 $[-1, 1]$ で f は単調減少。よって最大は $s = -1$ でとり

$$AP^2 = -3 + 2k + 4 + k^2 = (k+1)^2 \quad \therefore AP = k+1$$

まとめると

$$\begin{array}{ll} 0 < k \leq 3 & \dots \frac{2\sqrt{3(3+k^2)}}{3} \\ k > 3 & \dots k+1 \end{array}$$

(検算： $k = 3$ を代入すると (i) は $\sqrt{4+12} = 4$ 、(ii) は $3+1 = 4$ で一致する。また $k > 3$ のときの $k+1$ は、 $A(0, k)$ と下端 $(0, -1)$ の距離そのものである。)

この問題で身につくこと

- ・距離の最大最小は2乗して考える。根号を外してから動かす。
- ・ $\cos^2$ と $\sin$ の1次が混ざったら $\sin$ にそろえて2次関数に。合成ではない。
- ・ $s = \sin \theta$ の範囲 $-1 \leq s \leq 1$ を必ず書く。これを忘れると(3)で必ず落とす。
- ・上に凸のとき、最大は軸、最小は軸から遠いほうの端。
- ・(3)は軸が k で動くので場合分け。境目 $k = 3$ で両方の式が一致するかを確かめる。
- ・ $k > 3$ の答え $k+1$ は下端までの距離。図で意味が読めると、答えの正しさが実感できる。
- ・「いちばん遠い点は下端」は k が大きいときだけ。小さいときは横のほうが遠い。図で確かめる価値がある。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-3-1 楕円の総まとめ

(本文は問5参照)

問 19

$c > 0, d > c, 0 < e < 1$ とする。点 $P(x, y)$ から定点 $F(c, 0)$ までの距離を PF 、直線 $l: x = d$ に下ろした垂線の足を H とし、 $PF = ePH$ を満たす点 P の軌跡を C とする。

- (1) C の方程式を平方完成し、 C が楕円であることを示せ。また、その中心の座標と、長半径 a (長軸の半分) を c, d, e で表せ。 (2) C の 2 つの焦点のうち一方が F と一致することを示せ。 (3) C の中心が原点となるのは d がどのような値のときか。またそのとき、 d を a と e で表せ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままだ媒介変数か → ④落とす。

▶ Point 5-1-1

→ この問題は①と②を、文字のまま一般にやる。問 13 を文字にしたもの。

→ 問 13 は $c = 1, d = 4, e = \frac{1}{2}$ の場合だった。→ そのとき中心が原点に来て、 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ になった。→ あれはたまたまか、それとも仕組みがあるのか。→ それを調べる問題。

→ 文字が c, d, e と 3 つ。→ どれも定数で、動くのは x, y 。→ x, y について整理するのが第一手。

(1) → $PF = ePH$ を 2 乗。→ $(x - c)^2 + y^2 = e^2(x - d)^2$ 。

→ 展開して x について集める。→ x^2 の係数が $1 - e^2$ 。→ $0 < e < 1$ だからこれは正。→ y^2 の係数も正。→ 同符号なので楕円。

→ ここで楕円だと分かる理由が見えた。→ $e > 1$ なら $1 - e^2 < 0$ で符号が変わり、双曲線になる。→ $e = 1$ なら x^2 が消えて放物線。→ 3 曲線が e ひとつで切り替わる仕掛けはここ。

→ 平方完成。→ 中心の x 座標は $\frac{c - e^2d}{1 - e^2}$ 。

→ 右辺を計算するのが山場。→ 素直に展開すると項が多い。→ だがきれいにまとまる。→ $\frac{e^2(c - d)^2}{1 - e^2}$ 。

→ a^2 と b^2 をどう読むか。→ $(1 - e^2)(x - X_0)^2 + y^2 = R$ の形。→ 両辺を R で割る。→ x の側の分母が $\frac{R}{1 - e^2}$ 、 y の側が R 。

→ どちらが a^2 か。→ $0 < e < 1$ なので $\frac{1}{1 - e^2} > 1$ 。→ x の側のほうが大きい。→ 長軸は x 軸方向。→ 焦点も x 軸方向。→ F が x 軸上にあるので、つじつまが合う。

(2) → 焦点は中心から $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$ 。→ 計算すると $a^2 - b^2 = e^2a^2$ 。→ $\sqrt{a^2 - b^2} = ea$ 。→ 離心率がそのまま e だと確かめられた。

→ $X_0 + ea$ を計算する。→ 分母がそろって c になる。→ F そのもの。

(3) → 中心が原点 $\iff c - e^2d = 0 \iff d = \frac{c}{e^2}$ 。

→ そのとき a はどうなるか。→ 代入すると $a = \frac{c}{e}$ 。→ すなわち $c = ea$ 。→ 焦点が $(\pm ea, 0)$ という標準形の話と一致する。

→ d を a と e で書くと $d = \frac{c}{e^2} = \frac{ea}{e^2} = \frac{a}{e}$ 。→ 準線は $x = \frac{a}{e}$ 。→ 問 14 で 1 点から求めた $\frac{25}{3}$ が、ここで一般に証明された。

方針の候補

- 2乗して x について整理し、 x^2 の係数 $1-e^2 > 0$ から楕円と判定して平方完成する。▶ Point 5-5-1
- $a^2 - b^2 = e^2 a^2$ を示して離心率がそのまま e であることを確かめてから、焦点の位置を計算する。
- △ 先に平行移動して中心を原点に移し、標準形で議論する … 通る。見通しはよいが、最後にもとの座標へ戻す手間がある。文字が多いので、戻し忘れが起きやすい。
- × x の側と y の側のどちらが a^2 かを確かめずに進める … $0 < e < 1$ から $\frac{1}{1-e^2} > 1$ なので x の側が大きい。ここを取り違えると焦点が y 軸上に出てしまい、F と合わなくなる。
- × 焦点を $X_0 - ea$ のほうだけ調べて「一致しない」とする … 焦点は2つある。+ のほうが F に一致する。
- × 1組の数値 ($c = 1, d = 4, e = \frac{1}{2}$) で確かめて示したとする … 問13を再現しただけで、一般には示していない。文字のまま進める必要がある。

■ 解答

- (1) $PH = |x - d|$ であるから、 $PF = ePH$ の両辺は0以上で、2乗しても同値である。

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2(x - d)^2$$

展開して x について整理すると

$$(1 - e^2)x^2 - 2(c - e^2d)x + y^2 + c^2 - e^2d^2 = 0$$

$0 < e < 1$ より $1 - e^2 > 0$ であり、 x^2 と y^2 の係数がともに正であるから、この曲線は楕円（または点・空集合）である。

$X_0 = \frac{c - e^2d}{1 - e^2}$ とおいて平方完成すると

$$(1 - e^2)(x - X_0)^2 + y^2 = \frac{(c - e^2d)^2}{1 - e^2} - c^2 + e^2d^2$$

右辺を R とおいて通分すると

$$R = \frac{(c - e^2d)^2 - (1 - e^2)(c^2 - e^2d^2)}{1 - e^2} = \frac{e^2(c^2 - 2cd + d^2)}{1 - e^2} = \frac{e^2(c - d)^2}{1 - e^2}$$

$d > c$ より $R > 0$ であるから、両辺を R で割って

$$\frac{(x - X_0)^2}{\frac{R}{1 - e^2}} + \frac{y^2}{R} = 1$$

$0 < e < 1$ より $\frac{1}{1 - e^2} > 1$ であるから $\frac{R}{1 - e^2} > R$ 。よって長軸は x 軸方向で

$$\text{中心} \left(\frac{c - e^2d}{1 - e^2}, 0 \right), \quad a = \sqrt{\frac{R}{1 - e^2}} = \frac{e(d - c)}{1 - e^2}$$

($b^2 = R = \frac{e^2(d - c)^2}{1 - e^2}$ である。) これは楕円であり、示された。 ■

(2) $a^2 = \frac{R}{1-e^2}$ 、 $b^2 = R$ であるから

$$a^2 - b^2 = \frac{R}{1-e^2} - R = R \cdot \frac{1-(1-e^2)}{1-e^2} = e^2 \cdot \frac{R}{1-e^2} = e^2 a^2$$

よって $\sqrt{a^2 - b^2} = ea$ であり、焦点は中心から x 軸方向に $\pm ea$ だけ離れた点である。

$ea = \frac{e^2(d-c)}{1-e^2}$ であるから

$$X_0 + ea = \frac{c-e^2d}{1-e^2} + \frac{e^2(d-c)}{1-e^2} = \frac{c-e^2d+e^2d-e^2c}{1-e^2} = \frac{c(1-e^2)}{1-e^2} = c$$

よって焦点の一方は $(c, 0)$ 、すなわち F に一致する。 ■

(このとき離心率は $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{ea}{a} = e$ となり、与えられた比と一致している。)

(3) 中心が原点になるのは $X_0 = 0$ 、すなわち $c - e^2d = 0$ のときであるから

$$d = \frac{c}{e^2}$$

このとき (1) より

$$a = \frac{e\left(\frac{c}{e^2} - c\right)}{1-e^2} = \frac{e \cdot \frac{c(1-e^2)}{e^2}}{1-e^2} = \frac{c}{e}$$

すなわち $c = ea$ であるから

$$d = \frac{c}{e^2} = \frac{ea}{e^2} = \frac{a}{e}$$

(したがって、標準形の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の準線は $x = \pm \frac{a}{e}$ である。問 14 の $\frac{25}{3} = \frac{5}{3/5}$ はこの形になっている。)

(検算： $c = 1$ 、 $e = \frac{1}{2}$ とすると $d = \frac{1}{1/4} = 4$ 、 $a = \frac{1}{1/2} = 2$ 、 $b^2 = R = \frac{\frac{1}{4} \cdot 9}{\frac{3}{4}} = 3$ 。 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ となり、問 13 の答えと一致する。)

この問題で身につくこと

- ・ $PF = ePH$ を 2 乗して整理すると、 x^2 の係数が $1 - e^2$ 。 e の値で符号が変わる。
- ・ $e < 1$ なら楕円、 $e = 1$ なら x^2 が消えて放物線、 $e > 1$ なら双曲線。3 曲線が 1 本の式から出る。
- ・ 平方完成したら、どちらが a^2 かを大小で確かめる。取り違えると焦点の向きが変わる。
- ・ $a^2 - b^2 = e^2 a^2$ が示せれば、離心率がそのまま e だと分かる。
- ・ 焦点の一方が F に一致するのは偶然ではない。定義から作ったのだから当然である。
- ・ 準線は $x = \frac{a}{e}$ 。問 14 で 1 点から求めた値が、ここで一般に証明された。
- ・ 具体例で確かめて示したことにしない。ただし最後に具体例を入れて検算するのはよい。

使った Point (本編より。例題は省略)

Point 5-5-1 離心率

(本文は問 13 参照)

選ばなかった方針の Point (参考)

Point 5-3-1 楕円の総まとめ

(本文は問 5 参照)

問 20

楕円 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ の焦点のうち $x > 0$ にあるものを F とする。

(1) C 上の点 $P(x, y)$ について、 $PF = 2 - \frac{x}{2}$ が成り立つことを示せ。(2) F を通る直線が C と交わる2点を A, B とする。 $\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF}$ は直線の取り方によらず一定であることを示し、その値を求めよ。(3) $AF + BF$ の最小値を求めよ。

問題を見て思うこと

章のフロー：①どの曲線か → ②標準形にそろえる → ③式のままだ媒介変数か → ④落とす。

► Point 5-1-1

→ この問題は④。ただし何に落とすかを自分で選ぶ必要がある。

→ この楕円は問13で出たもの。→ $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1, e = \frac{1}{2}$ 。→ $F(1, 0)$ 。

(1) → PF を素直に書くと $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ 。→ 根号が邪魔。→ しかし y^2 を消せる。

→ $y^2 = 3\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$ を代入。→ 中身が $\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2$ という完全平方になる。

→ 根号が外れるには、中身が0以上でなければならない。→ $-2 \leq x \leq 2$ なので $2 - \frac{x}{2} \geq 1 > 0$ 。

→ 絶対値を外せる。

→ この $PF = 2 - \frac{x}{2}$ は x の1次式。→ 焦点までの距離が1次式になるのが、この節の主役。

→ 離心率を使えば $PF = a - ex$ と書ける。

► Point 5-5-1

(2) → (1) があるおかげで、 $\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF}$ が x 座標だけの式になる。→ 根号が最初から出てこない。

→ 直線を $y = m(x-1)$ とおいて代入。→ 2次方程式の解と係数の関係で $x_A + x_B, x_A x_B$ が出る。→ 個々の解を求める必要はない。

→ ただし y 軸に平行な直線 ($x = 1$) は $y = m(x-1)$ の形で書けない。→ 別に確かめる。→ ここを落とすと減点される。

→ 通分して整理すると m が全部消える。→ $\frac{4}{3}$ 。

→ この $\frac{4}{3}$ は何か。→ $\frac{2a}{b^2} = \frac{4}{3}$ 。→ 半通径 (焦点を通り長軸に垂直な弦の半分) $\frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$ の逆数の2倍。→ 縦の弦のときは $AF = BF = \frac{3}{2}$ なので、和は $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$ 。→ ここで検算できる。

(3) → (2) の式を作る途中で $AF + BF$ も出せる。→ $4 - \frac{x_A + x_B}{2}$ 。

→ $m^2 = u$ とおくと $\frac{12(1+u)}{3+4u}$ 。→ $u \geq 0$ で単調減少。→ $u \rightarrow \infty$ で3に近づく。

→ $u \rightarrow \infty$ は傾きが無限大、つまり縦の弦。→ その場合は(2)で別に調べた $x = 1$ のとき。→ $AF = BF = \frac{3}{2}$ で和は3。→ ちゃんと到達するので、最小値は3。

→ $u = 0$ (横の弦) のときは $4 = 2a$ 。→ 長軸そのもので、これが最大。→ $3 \leq AF + BF \leq 4$ 。図でも納得できる。

方針の候補

- (1) で y^2 を消して完全平方に持ちこみ、**焦点までの距離を x の1次式にする。** ▶ Point 5-5-1
- 直線を $y = m(x - 1)$ とおいて代入し、**解と係数の関係**で処理する。個々の解は求めない。
- $x = 1$ (y 軸に平行な弦) を**別に確かめる**。 $y = m(x - 1)$ では表せない。
- △ 媒介変数 $P(2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$ で2交点を表す… 通らなくはないが、**2点と同じ直線上にある条件を θ で書くのが面倒**。この問題では x 座標で処理するほうが軽い。
- △ 焦点を通る弦を極方程式で表す… $r = \frac{l}{1 + e\cos\varphi}$ とすれば一発だが、**高校の範囲では極方程式の準備が要る**。使うなら導出から書く。
- × (1) で根号を外すときに絶対値を確かめない… $\sqrt{(2 - \frac{x}{2})^2} = |2 - \frac{x}{2}|$ 。 $-2 \leq x \leq 2$ から正だと断る必要がある。
- × AF, BF を根号のまま扱う… (1) を使えば1次式になる。**(1) は (2) のための下ごしらえである**。
- × (3) で $u \rightarrow \infty$ を「到達しないから最小値なし」とする… $u = m^2$ が無限大に対応するのは**縦の弦 $x = 1$ で、これは実在する**。値3は実際にとる。

■ 解答

$a = 2$ 、 $b^2 = 3$ より $c = \sqrt{4 - 3} = 1$ 。よって $F(1, 0)$ 、離心率は $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ である。

(1) $P(x, y)$ が C 上にあるとき $y^2 = 3\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 3 - \frac{3}{4}x^2$ 。よって

$$PF^2 = (x - 1)^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + 3 - \frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = \left(2 - \frac{x}{2}\right)^2$$

C 上では $-2 \leq x \leq 2$ であるから $2 - \frac{x}{2} \geq 1 > 0$ 。したがって

$$PF = \left|2 - \frac{x}{2}\right| = 2 - \frac{x}{2}$$

が成り立つ。 ■

(これは $PF = a - ex$ の形である。)

(2) (i) **直線が y 軸に平行なとき**、すなわち $x = 1$ のとき、 A, B の x 座標はともに1であるから

(1) より $AF = BF = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。よって

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$$

(ii) **それ以外**のとき、直線は $y = m(x - 1)$ とおける。 C の式に代入して

$$\frac{x^2}{4} + \frac{m^2(x - 1)^2}{3} = 1 \iff (3 + 4m^2)x^2 - 8m^2x + 4m^2 - 12 = 0$$

A, B の x 座標を α, β とすると、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{8m^2}{3 + 4m^2}, \quad \alpha\beta = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4m^2}$$

(1) より $AF = 2 - \frac{\alpha}{2} = \frac{4-\alpha}{2}$ 、 $BF = \frac{4-\beta}{2}$ であるから

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{2}{4-\alpha} + \frac{2}{4-\beta} = \frac{2\{(4-\beta) + (4-\alpha)\}}{(4-\alpha)(4-\beta)} = \frac{2\{8 - (\alpha + \beta)\}}{16 - 4(\alpha + \beta) + \alpha\beta}$$

分子は

$$2\left(8 - \frac{8m^2}{3+4m^2}\right) = 2 \cdot \frac{24 + 32m^2 - 8m^2}{3+4m^2} = \frac{48 + 48m^2}{3+4m^2}$$

分母は

$$16 - \frac{32m^2}{3+4m^2} + \frac{4m^2 - 12}{3+4m^2} = \frac{48 + 64m^2 - 32m^2 + 4m^2 - 12}{3+4m^2} = \frac{36 + 36m^2}{3+4m^2}$$

よって

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{48(1+m^2)}{36(1+m^2)} = \frac{4}{3}$$

(i)(ii) より、直線の取り方によらず

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{4}{3} \quad (\text{一定})$$

■

(3) (ii) の記号のもとで

$$AF + BF = \frac{(4-\alpha) + (4-\beta)}{2} = \frac{8 - (\alpha + \beta)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24 + 32m^2 - 8m^2}{3+4m^2} = \frac{12(1+m^2)}{3+4m^2}$$

$u = m^2$ ($u \geq 0$) とおくと

$$g(u) = \frac{12(1+u)}{3+4u} = \frac{3(3+4u) + 3}{3+4u} \cdot \frac{12}{12}$$

と変形するより、通分して差をとるほうが早い。実際

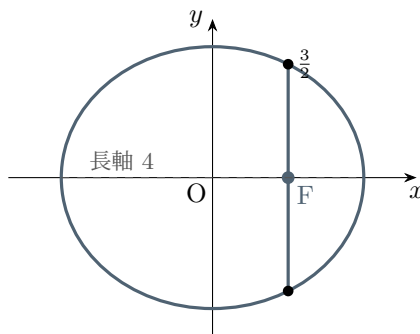
$$g(u) - 3 = \frac{12 + 12u - 3(3+4u)}{3+4u} = \frac{3}{3+4u} > 0$$

であるから $g(u) > 3$ であり、 u が大きくなるほど $g(u)$ は 3 に近づく。

一方 (i) の場合 (y 軸に平行な弦) は $AF + BF = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$ であり、この値は実際にとる。よって

最小値 **3** (直線が $x = 1$ のとき)

($u = 0$ 、すなわち長軸のときは $g(0) = 4 = 2a$ で最大。よって $3 \leq AF + BF \leq 4$ である。)



縦の弦（太線）で $AF + BF = 3$ が最小、長軸（破線）で 4 が最大。 $\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF}$ はどちらも $\frac{4}{3}$ 。

この問題で身につくこと

- ・焦点までの距離は $PF = a - ex$ という 1 次式になる。根号が消えるのが最大の効き目。
- ・根号を外すときは中身の符号を確かめる。 $-2 \leq x \leq 2$ から正だと言う。
- ・2 交点の情報は解と係数の関係で足りる。個々の解を求めない。
- ・ $y = m(x - 1)$ では縦の弦を表せない。別に調べる。ここを落とすと減点される。
- ・ $\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{2a}{b^2}$ 。縦の弦で計算すれば 1 行で検算できる。
- ・(3) は「近づくだけ」に見えて、その値を実際にとる場合（縦の弦）がある。極限と最小値を混同しない。
- ・(1) は飾りではなく (2)(3) の土台。小問の並びは計算の順序を教えてくれる。

使った Point（本編より。例題は省略）

Point 5-5-1 離心率

（本文は問 13 参照）

Point 5-3-1 楕円の総まとめ

（本文は問 5 参照）